

本节内容

算法

效率的度量

王道考研/CSKAOYAN.COM

1

知识总览

时间复杂度

空间复杂度

算法效率的度量

王道考研/CSKAOYAN.COM

2

如何评估算法时间开销?



让算法先运行，事后统计运行时间?



存在什么问题?

- 和机器性能有关，如：超级计算机 v.s. 单片机
- 和编程语言有关，越高级的语言执行效率越低
- 和编译程序产生的机器指令质量有关
- 有些算法是不能事后再统计的，如：导弹控制算法

能否排除与算法本身无关的外界因素

能否事先估计?



算法时间复杂度

事前预估算法时间开销 $T(n)$ 与问题规模 n 的关系 (T 表示 “time”)

王道考研/CSKAOYAN.COM

3

算法的时间复杂度



用算法表白——“爱你 n 遍”

王道考研/CSKAOYAN.COM

4

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
    ① int i=1; //爱你的程度
    ② while(i<=n){
    ③     i++; //每次+1
    ④     printf("I Love You %d\n", i);
    }
    ⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

```
int main(){
    loveYou(3000);
}
```

```
I Love You 2994
I Love You 2995
I Love You 2996
I Love You 2997
I Love You 2998
I Love You 2999
I Love You 3000
I Love You 3001
I Love You More Than 3000
```

语句频度:

- ① ---1次
- ② ---3001次
- ③④ ---3000次
- ⑤ ---1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1
时间开销与问题规模 n 的关系:

T(n)=3n+3



思考中.....

问题1: 是否可以忽略表达式某些部分?

问题2: 如果有好几千行代码, 按这种方法需要一行一行数?

算法的时间复杂度

全称: 渐进时间复杂度

思考中.....



问题1: 是否可以忽略表达式某些部分?

当问题规模 n 足够大时...

大O表示“同阶”, 同等数量级。即: 当 n→∞时, 二者之比为常数

$$T_1(n) = O(n)$$

$$T_2(n) = O(n^2)$$

$$T_3(n) = O(n^3)$$

简化

时间开销与问题规模 n 的关系:

T₁(n)=3n+3

T₂(n)=n²+3n+1000

T₃(n)=n³ + n² + 99999999

若 n=3000, 则

| | | |
|---------------------------------|------|------------------------------------|
| 3n = 9000 | V.S. | T ₁ (n)= 9003 |
| n ² = 9,000,000 | V.S. | T ₂ (n)= 9,010,000 |
| n ³ = 27,000,000,000 | V.S. | T ₃ (n)= 27,018,999,999 |

结论1: 可以只考虑阶数高的部分

当 n=3000 时, 9999n = 29,997,000 远小于 n³ = 27,018,999,999
 当 n=1000000 时, 9999n = 9,999,000,000 远小于 n² = 1,000,000,000,000

结论2: 问题规模足够大时, 常数项系数也可以忽略

算法的时间复杂度

思考中.....



问题1: 是否可以忽略表达式某些部分?

当问题规模 n 足够大时...

时间开销与问题规模 n 的关系:

$$T_1(n) = 3n + 3$$

$$T_2(n) = n^2 + 3n + 1000$$

$$T_3(n) = n^3 + n^2 + 9999999$$

$T_1(n) = O(n)$
 $T_2(n) = O(n^2)$
 $T_3(n) = O(n^3)$

← 简化

a) 加法规则
 $T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$
多项相加, 只保留最高阶的项, 且系数变为1

b) 乘法规则
 $T(n) = T_1(n) \times T_2(n) = O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$
多项相乘, 都保留

Eg: $T_3(n) = n^3 + n^2 \log_2 n$
 $= O(n^3) + O(n^2 \log_2 n)$
 $= ? ? ?$

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

算法的时间复杂度

$O(1) < O(\log_2 n) < O(n) < O(n \log_2 n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$

问题: 两个算法的时间复杂度分别如下, 哪个的阶数更高 (时间复杂度更高)?

$T_1(n) = O(n)$
 $T_2(n) = O(\log_2 n)$

Eg: $T_3(n) = n^3 + n^2 \log_2 n$
 $= O(n^3) + O(n^2 \log_2 n)$
 $= O(n^2 n) + O(n^2 \log_2 n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln 2} = 0$
当 $n \rightarrow \infty$ 时, n 比 $\log_2 n$ 变大的速度快很多

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2^n \ln 2} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2^n \ln^2 2} = 0$
当 $n \rightarrow \infty$ 时, 2^n 比 n^2 变大的速度快很多



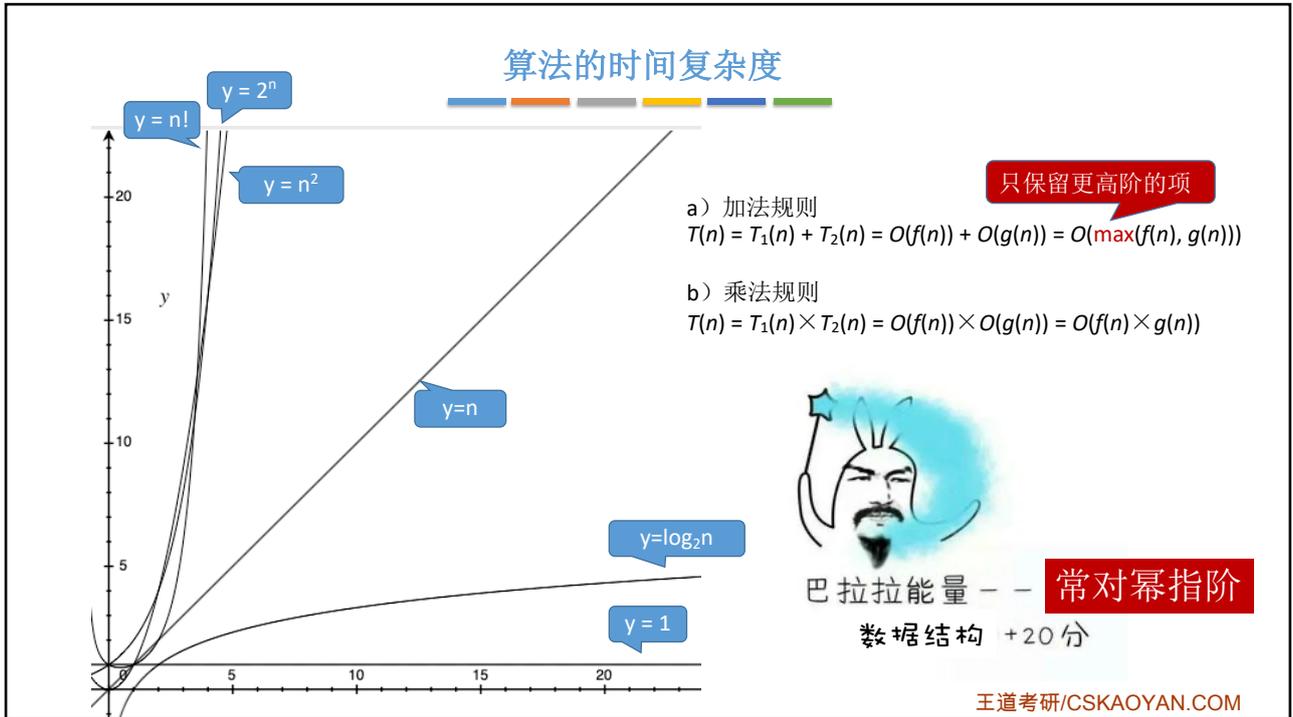
敲黑板

别紧张 放轻松 😊



王道考研/CSKAOYAN.COM

8



9

算法的时间复杂度

```

//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
  ① int i=1; //爱你的程度
  ② while(i<=n){
  ③     i++; //每次+1
  ④     printf("I Love You %d\n", i);
  }
  ⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}

int main(){
  loveYou(3000);
}
  
```

I Love You 2994
 I Love You 2995
 I Love You 2996
 I Love You 2997
 I Love You 2998
 I Love You 2999
 I Love You 3000
 I Love You 3001
 I Love You More Than 3000

语句频度:
 ① ——1次
 ② ——3001次
 ③④ ——3000次
 ⑤ ——1次

$T(3000) = 1 + 3001 + 2 \times 3000 + 1$
 时间开销与问题规模 n 的关系:
 $T(n) = 3n+3 = O(n)$

思考中.....

问题1: 是否可以忽略表达式某些部分?
 只考虑阶数, 用大O记法表示

问题2: 如果有好几千行代码, 按这种方法需要一行一行数?

王道考研/CSKAOYAN.COM

10

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
  ① int i=1; //爱你的程度
  ② while(i<=n){
  ③     i++; //每次+1
  ④     printf("I Love You %d\n", i);
  }
  ⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

此处插入1000行顺序执行的代码

语句频度:

- ① ---1次
- ② ---3001次
- ③④ ---3000次
- ⑤ ---1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1
时间开销与问题规模 n 的关系:

$T(n) = 3n + 3 = O(n)$

结论1: 顺序执行的代码只会影响常数项, 可以忽略

结论2: 只需挑循环中的一个基本操作分析它的执行次数与 n 的关系即可



机智如我

T(3000) = 1000 + 1 + 3001 + 2*3000 + 1
时间开销与问题规模 n 的关系:

$T(n) = 3n + 1003 = O(n)$

算法的时间复杂度

```
//算法2— 嵌套循环型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
  int i=1; //爱你的程度
  while(i<=n){ //外层循环执行n次
    i++; //每次+1
    printf("I Love You %d\n", i);
    for (int j=1; j<=n; j++){ //嵌套两层循环
      printf("I am Iron Man\n"); //内层循环共执行n^2次
    }
  }
  printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

时间开销与问题规模 n 的关系:

$T(n) = O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

结论1: 顺序执行的代码只会影响常数项, 可以忽略

结论2: 只需挑循环中的一个基本操作分析它的执行次数与 n 的关系即可

结论3: 如果有多层嵌套循环, 只需关注最深层循环循环了几次



机智如我

算法的时间复杂度

```

//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
    ① int i=1; //爱你的程度
    ② while(i<=n){
    ③     i++; //每次+1
    ④     printf("I Love You %d\n", i);
    }
    ⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
                
```

语句频度:

① ——1次
 ② ——3001次
 ③④ ——3000次
 ⑤ ——1次

$T(3000) = 1 + 3001 + 2 * 3000 + 1$
 时间开销与问题规模 n 的关系:
 $T(n) = 3n + 3 = O(n)$

```

int main(){
    loveYou(3000);
}
                
```

I Love You 2994
 I Love You 2995
 I Love You 2996
 I Love You 2997
 I Love You 2998
 I Love You 2999
 I Love You 3000
 I Love You 3001
 I Love You More Than 3000

思考中.....

问题1: 是否可以忽略表达式某些部分?

只考虑阶数, 用大O记法表示

问题2: 如果有好几千行代码, 按这种方法需要一行一行数?

只需考虑最深层循环的循环次数与 n 的关系

王道考研/CSKAOYAN.COM

13

小练习1

```

//算法3— 指数递增型爱你
void loveYou(int n) { //n 为问题规模
    int i=1; //爱你的程度
    while(i<=n){
        i=i*2; //每次翻倍
        printf("I Love You %d\n", i);
    }
    printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
                
```

计算上述算法的时间复杂度 $T(n)$:
 设最深层循环的语句频度 (总共循环的次数) 为 x , 则
 由循环条件可知, 循环结束时刚好满足 $2^x > n$
 $x = \log_2 n + 1$

$T(n) = O(x) = O(\log_2 n)$

I Love You 32
 I Love You 64
 I Love You 128
 I Love You 256
 I Love You 512
 I Love You 1024
 I Love You 2048
 I Love You 4096
 I Love You More Than 3000

王道考研/CSKAOYAN.COM

14

小练习2

```
//算法4— 搜索数字型爱你
void loveYou(int flag[], int n) { //n 为问题规模
    printf("I Am Iron Man\n");
    for(int i=0; i<n; i++){ //从第一个元素开始查找
        if(flag[i]==n){ //找到元素n
            printf("I Love You %d\n", n); //flag 数组中乱序存放了 1~n 这些数
            break; //找到后立即跳出循环 //flag 数组中乱序存放了 1~n 这些数
        }
    }
    int flag[n]={1...n};
    loveYou(flag, n);
}
```

计算上述算法的时间复杂度 $T(n)$

最好情况：元素 n 在第一个位置

——最好时间复杂度 $T(n)=O(1)$

最坏情况：元素 n 在最后一个位置

——最坏时间复杂度 $T(n)=O(n)$

平均情况：假设元素 n 在任意一个位置的概率相同为 $\frac{1}{n}$

——平均时间复杂度 $T(n)=O(n)$

$$\text{循环次数 } x = (1+2+3+\dots+n) \frac{1}{n} = \left(\frac{n(1+n)}{2}\right) \frac{1}{n} = \frac{1+n}{2} \quad T(n)=O(x)=O(n)$$

很多算法执行时间与输入的数据有关

王道考研/CSKAOYAN.COM

15

算法的时间复杂度

最坏时间复杂度：最坏情况下算法的时间复杂度

平均时间复杂度：所有输入示例等概率出现的情况下，算法的期望运行时间

最好时间复杂度：最好情况下算法的时间复杂度

王道考研/CSKAOYAN.COM

16

知识回顾与重要考点

时间复杂度

- 如何计算
 - ① 找到一个基本操作（最深层循环）
 - ② 分析该基本操作的执行次数 x 与问题规模 n 的关系 $x=f(n)$
 - ③ x 的数量级 $O(x)$ 就是算法时间复杂度 $T(n)$
- 常用技巧
 - 加法规则: $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$
 - 乘法规则: $O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$
 - “常对幂指阶”
 - $O(1) < O(\log_2 n) < O(n) < O(n \log_2 n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$**
- 三种复杂度
 - 最坏时间复杂度: 考虑输入数据“最坏”的情况
 - 平均时间复杂度: 考虑所有输入数据都等概率出现的情况
 - 最好时间复杂度: 考虑输入数据“最好”的情况

小故事: 算法的性能问题只有在 n 很大时才会暴露出来。

王道考研/CSKAOYAN.COM

17



@王道论坛



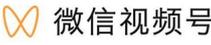
@王道计算机考研备考
@王道咸鱼老师-计算机考研
@王道楼楼老师-计算机考研



@王道计算机考研



@王道计算机考研



@王道计算机考研



@王道在线

18