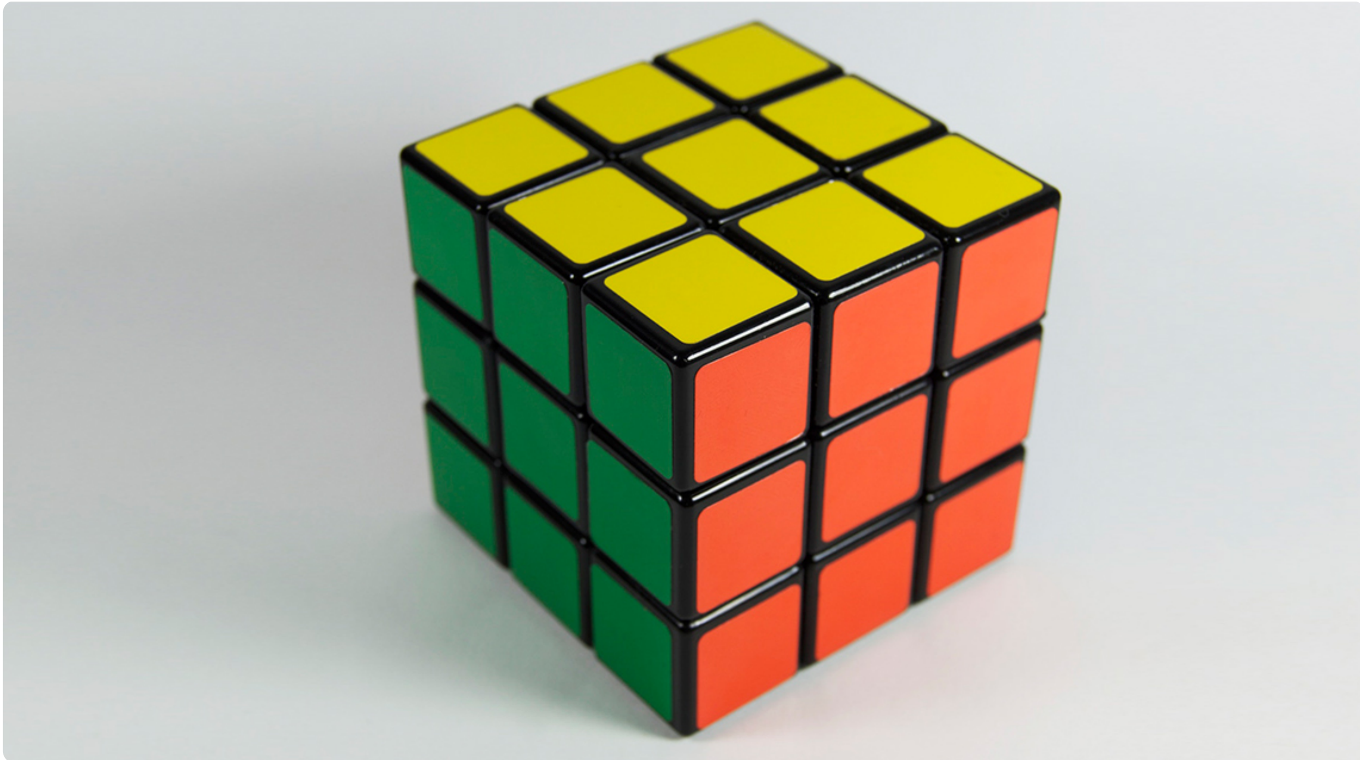
01 数学基础 | 九层之台，起于累土：线性代数

2017-12-09 王天一



讲述：王天一
时长 10:57 大小 5.02M

“人工智能基础课”将从数学基础开始。必备的数学知识是理解人工智能不可或缺的要素，今天的种种人工智能技术归根到底都建立在数学模型之上，而这些数学模型又都离不开线性代数（linear algebra）的理论框架。

事实上，线性代数不仅仅是人工智能的基础，更是现代数学和以现代数学作为主要分析方法的众多学科的基础。从量子力学到图像处理都离不开向量和矩阵的使用。而在向量和矩阵背后，线性代数的核心意义在于提供了一种看待世界的抽象视角：**万事万物都可以被抽象成某些特征的组合，并在由预置规则定义的框架之下以静态和动态的方式加以观察。**

线性代数中最基本的概念是集合（set）。在数学上，集合的定义是由某些特定对象汇总而成的集体。集合中的元素通常会具有某些共性，因而可以用这些共性来表示。对于集合 { 苹果，橘子，梨 } 来说， 所有元素的共性是它们都是水果；对于集合 {牛，马，羊} 来说，所

有元素的共性是它们都是动物。当然 { 苹果，牛 } 也可以构成一个集合，但这两个元素并没有明显的共性，这样的集合在解决实际问题中的作用也就相当有限。

“苹果”或是“牛”这样的具体概念显然超出了数学的处理范围，因而集合的元素需要进行进一步的抽象——用数字或符号来表示。如此一来，集合的元素既可以是单个的数字或符号，也可以是多个数字或符号以某种方式排列形成的组合。

在线性代数中，由单独的数 a 构成的元素被称为标量（scalar）：一个标量 a 可以是整数、实数或复数。如果多个标量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按一定顺序组成一个序列，这样的元素就被称为向量（vector）。显然，向量可以看作标量的扩展。原始的一个数被替代为一组数，从而带来了维度的增加，给定表示索引的下标才能唯一地确定向量中的元素。

每个向量都由若干标量构成，如果将向量的所有标量都替换成相同规格的向量，得到的就是如下的矩阵（matrix）：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

相对于向量，矩阵同样代表了维度的增加，矩阵中的每个元素需要使用两个索引（而非一个）确定。同理，如果将矩阵中的每个标量元素再替换为向量的话，得到的就是张量（tensor）。直观地理解，张量就是高阶的矩阵。

如果把三阶魔方的每一个小方块看作一个数，它就是个 3×3×3 的张量，3×3 的矩阵则恰是这个魔方的一个面，也就是张量的一个切片。相比于向量和矩阵，张量是更加复杂，直观性也更差的概念。

向量和矩阵不只是理论上的分析工具，也是计算机工作的基础条件。人类能够感知连续变化的大千世界，可计算机只能处理离散取值的二进制信息，因而来自模拟世界的信号必须在定义域和值域上同时进行数字化，才能被计算机存储和处理。从这个角度看，**线性代数是用虚拟数字世界表示真实物理世界的工具**。

在计算机存储中，标量占据的是零维数组；向量占据的是一维数组，例如语音信号；矩阵占据的是二维数组，例如灰度图像；张量占据的是三维乃至更高维度的数组，例如 RGB 图像和视频。

描述作为数学对象的向量需要有特定的数学语言，范数和内积就是代表。范数（norm）是对单个向量大小的度量，描述的是向量自身的性质，其作用是将向量映射为一个非负的数值。通用的 L^p 范数定义如下：

$$|\mathbf{x}|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

对一个给定向量，L^1 范数计算的是向量所有元素绝对值的和，L^2 范数计算的是通常意义上的向量长度，L^∞ 范数计算的则是向量中最大元素的取值。

范数计算的是单个向量的尺度，内积（inner product）计算的则是两个向量之间的关系。两个相同维数向量内积的表达式为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i \cdot y_i$$

即对应元素乘积的求和。内积能够表示两个向量之间的相对位置，即向量之间的夹角。一种特殊的情况是内积为 0，即 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$。在二维空间上，这意味着两个向量的夹角为 90 度，即相互垂直。而在高维空间上，这种关系被称为正交（orthogonality）。如果两个向量正交，说明他们线性无关，相互独立，互不影响。

在实际问题中，向量的意义不仅是某些数字的组合，更可能是某些对象或某些行为的特征。范数和内积能够处理这些表示特征的数学模型，进而提取出原始对象或原始行为中的隐含关系。

如果有一个集合，它的元素都是具有相同维数的向量（可以是有限个或无限个）， 并且定义了加法和数乘等结构化的运算，这样的集合就被称为线性空间（linear space），定义了内积运算的线性空间则被称为内积空间（inner product space）。**在线性空间中，任意一个向量代表的都是 n 维空间中的一个点；反过来， 空间中的任意点也都可以唯一地用一个向量表示**。两者相互等效。

在线性空间上点和向量的相互映射中，一个关键问题是参考系的选取。在现实生活中，只要给定经度、纬度和海拔高度，就可以唯一地确定地球上的任何一个位置，因而经度值、纬度值、高度值构成的三维向量 (x, y, h) 就对应了三维物理空间中的一个点。

可是在直觉无法感受的高维空间中，坐标系的定义可就没有这么直观了。要知道，人工神经网络要处理的通常是数以万计的特征，对应着维度同样数以万计的复杂空间，这时就需要正交基的概念了。

在内积空间中，一组两两正交的向量构成这个空间的正交基（orthogonal basis），假若正交基中基向量的 L^2 范数都是单位长度 1，这组正交基就是标准正交基（orthonormal basis）。正交基的作用就是给内积空间定义出经纬度。一旦描述内积空间的正交基确定了，向量和点之间的对应关系也就随之确定。

值得注意的是，描述内积空间的正交基并不唯一。对二维空间来说，平面直角坐标系和极坐标系就对应了两组不同的正交基，也代表了两种实用的描述方式。

线性空间的一个重要特征是能够承载变化。当作为参考系的标准正交基确定后，空间中的点就可以用向量表示。当这个点从一个位置移动到另一个位置时，描述它的向量也会发生改变。**点的变化对应着向量的线性变换（linear transformation），而描述对象变化抑或向量变换的数学语言，正是矩阵。**

在线性空间中，变化的实现有两种方式：一是点本身的变化，二是参考系的变化。在第一种方式中，使某个点发生变化的方法是用代表变化的矩阵乘以代表对象的向量。可是反过来，如果保持点不变，而是换一种观察的角度，得到的也将是不同的结果，正所谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”。

在这种情况下，矩阵的作用就是对正交基进行变换。因此，对于矩阵和向量的相乘，就存在不同的解读方式：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

这个表达式既可以理解为向量 x 经过矩阵 A 所描述的变换，变成了向量 y；也可以理解为一个对象在坐标系 A 的度量下得到的结果为向量 x，在标准坐标系 I（单位矩阵：主对角线元素为 1，其余元素为 0）的度量下得到的结果为向量 y。

这表示矩阵不仅能够描述变化，也可以描述参考系本身。引用网络上一个精当的类比：表达式 Ax 就相当于对向量 x 做了一个环境声明，用于度量它的参考系是 A。如果想用其他的参考系做度量的话，就要重新声明。**而对坐标系施加变换的方法，就是让表示原始坐标系的矩阵与表示变换的矩阵相乘。**

描述矩阵的一对重要参数是特征值（eigenvalue）和特征向量（eigenvector）。对于给定的矩阵 A，假设其特征值为λ，特征向量为 x，则它们之间的关系如下：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

正如前文所述，矩阵代表了向量的变换，其效果通常是对原始向量同时施加方向变化和尺度变化。可对于有些特殊的向量，矩阵的作用只有尺度变化而没有方向变化，也就是只有伸缩的效果而没有旋转的效果。对于给定的矩阵来说，这类特殊的向量就是矩阵的特征向量，特征向量的尺度变化系数就是特征值。

矩阵特征值和特征向量的动态意义在于表示了变化的速度和方向。如果把矩阵所代表的变化看作奔跑的人，那么矩阵的特征值就代表了他奔跑的速度，特征向量代表了他奔跑的方向。但矩阵可不是普通人，它是三头六臂的哪吒，他的不同分身以不同速度（特征值）在不同方向（特征向量）上奔跑，所有分身的运动叠加在一起才是矩阵的效果。

求解给定矩阵的特征值和特征向量的过程叫做特征值分解，但能够进行特征值分解的矩阵必须是 n 维方阵。将特征值分解算法推广到所有矩阵之上，就是更加通用的奇异值分解。

今天我和你分享了人工智能必备的线性代数基础，着重于抽象概念的解释而非具体的数学公式，其要点如下：

- 线性代数的本质在于将具体事物抽象为数学对象，并描述其静态和动态的特性；
- 向量的实质是 n 维线性空间中的静止点；
- 线性变换描述了向量或者作为参考系的坐标系的变化，可以用矩阵表示；
- 矩阵的特征值和特征向量描述了变化的速度与方向。

线性代数之于人工智能如同加法之于高等数学。这样一个基础的工具集，你能想到它在人工智能中的哪些具体应用呢？

欢迎发表你的观点。

人工智能数学基础 | “线性代数”要点

1. 线性代数的本质在于将具体事物抽象为数学对象，并描述其静态和动态的特性；
2. 向量的实质是n维线性空间中的静止点；
3. 线性变换描述了向量或者作为参考系的坐标系的变化，可以用矩阵表示；
4. 矩阵的特征值和特征向量描述了变化的速度与方向。

上一篇 开篇词 | 人工智能：新时代的必修课

下一篇 02 数学基础 | 月有阴晴圆缺，此事古难全：概率论

精选留言 (71)

写留言

刘祯 置顶

2017-12-25

22

今天最大的启发就是，出来混，迟早要还的。大学时候读了文学方向，考研努力了一年有余，备考了高等数学，可是现在重新捡起来真的很有难度。

科学始终都是要有理论基础的，从纯粹的构想到最终的论证过程，这是一系列的思考与解答。只是，当时却不知道为什么要学习数学，只是模糊地理解原来经济学需要扎实的数...

展开

作者回复: 线代最主要的作用在于将万事万物转化成计算机能够处理的形式化对象，让一些模糊的抽象概念可以被量化。有了它，各种算法才有用武之地。学习资料有一篇专门的文章介绍。

王天一 置顶

2017-12-11

15

@ junwen.luo 当单频的正弦波输入线性时不变系统时，输出仍然是原始频率的正弦波，改变的只是幅度和相位。所以每个单频信号都是线性时不变系统的特征向量，其幅度和相位的变化就是特征值，这就是傅立叶变换的基础。

展开

王天一 置顶

2017-12-11

2

@ 夜行观星 非线性空间就要使用非线性代数了。非线性代数就是加法和数乘都不满足通常的定义，要分析就很困难。无甚必要使用这么复杂的模型。

王天一 置顶

2017-12-11

@ 秦龙君-北大 @huahua8893 每个模块结束后，会单独对参考资料做个梳理

展开

斌 置顶 1

2017-12-24

请问下老师，除了线性代数，是否还需要微积分的基础呢？如果需要可否指点一下具体是那几个章节的知识点呢，谢谢！

> 作者回复: 微积分主要会用到和导数相关的一切知识，尤其是多元函数的求导，最优化用到的是求导和极值/最值方面的知识。这些是基本工具，深入的话还会用到其他数学，那就需要具体情况具体分析了。

丫丫 18

2017-12-18

老同学跑过来听课，但是完全听不懂。

展开

宇宙全栈 14

2017-12-11

赞，大学时要是能用这样的教材学习线性代数就好了。

展开

数据之禅 10

2017-12-09

零阶张量是标量，一阶张量是向量，二阶张量是矩阵，三阶张量可以理解为三维几何体

---

aibear2018 9

2018-02-08

解释的太精彩了，高中时候就知道计算，完全不知道这些代表了什么东西，有什么意义，现在看来真是遗憾啊，高中时候要知道这些，是不是会更有学习动力和兴趣呢

展开

作者回复: 不开玩笑，小学就应该接触。这些数学代表的是思维方式，具体细节可以不用太深入，但思想方法接触得越早越好。

能量熊

2018-06-12

8

全是名词概念，能不能讲的再具体浅显易懂些，毕竟是基础入门

展开

夜行观星

2017-12-10

6

这里面的关键在于在线性空间，是不是非线性空间，目前的结论都不会适用?

一个明显的应用：一个向量代表一个点，那应用上可以代表一个人，对两个向量做内积，就是代表两个人线性相关度。

有的人或许就是线性无关的

大斌

2017-12-09

5

哇塞，老师的声音都赶上播音主持了👍👍赞

展开

yunfeng

2018-02-24

4

为啥我们很多人读书的时候，学习线性代数、高数啥的，几乎都是纯理论，没有将这些知识运用到ai或者其他领域中。在读研的时候，学习图像处理就明白高数中傅立叶变换居然可以用到图形处理。

展开

作者回复: 空间上的二维傅立叶变换不光是图像处理，也是信息光学的基础。

Andy

2017-12-10

4

要说大学的数学知识是一颗一颗的钻石，那老师的课程就像一条可以把钻石穿起来的铂金项链！ 但是老师的语速可以慢一点吗，有点太快了😁

啊～好好吃... 3
2018-01-26

出来混迟早是要还的。

展开

Davilk 3
2018-01-25

王老师，27岁了转行学ai还晚吗?

展开

作者回复: 不晚，但务必想清楚为什么要学，和学完了能做什么。

清音阁 2
2018-06-07

老师讲的非常好👍但其中有些举例似乎不够严谨。例如语音是一维向量？好像没这么简单。

作者回复: 这个话说的可能有些歧义，一维不是指元素的维度，而是自变量的维度，语音只有时间一个维度的自变量。

Torjan-Du... 2
2018-02-19

我能理解为建模么？将问题转化成解决方案的模型

展开

作者回复: 是的，把抽象的问题转化成可以处理的数学对象

Tsubasa翼
2018-02-11

2

请问极坐标系的正交基是啥?

展开

作者回复: 幅度和相位

---

tianlx
2017-12-23

2

看了两节，王老师讲得很透彻！我直接订阅了。

展开