第一章　函数、极限、连续

大纲要求

了解　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，连续函数的性质和初等函数的连续性，

会 建立应用问题中的函数关系式。利用极限存在的两个准则求极限，用等价无穷小量求极限，判别函数间断点的类型．应用闭区间上连续函数的性质．

理解 函数的概念，复合函数及分段函数的概念，极限的概念，函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系，无穷小、无穷大的概念，无穷小的比较，函数连续性的概念（含左连续与右连续），闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），

掌握 函数的表示法，基本初等函数的性质及其图形，　极限的性质及四则运算法则，极限存在的两个准则，　利用两个重要极限求极限的方法．无穷小的比较方法，用洛必达法则求未定式极限的方法．

第一节　函 数

内容精要

（一）　基本概念

1．函数的定义

定义 1.1 设 A、B 是两个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 A 中任何一个实数 x，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称对应法则 f 是 A 上的函数，记为

$$f: x - y \quad ⊣ \quad f: A \to B .$$

y 称为 x 对应的函数值，记为　$y = f(x), x \in A$.

其中 x 叫做自变量，y 又叫因变量，A 称为函数 f 的定义域，记为 D（f），$\{f(x) | x \in A\}$，称为函数的值域，记为 R（f），在平面坐标系 Oxy 下，集合 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 y=f(x)的图形。

（1）函数是微积分中最重要最基本的一个概念，因为微积分是以函数为研究对象，运用无穷小及无穷大过程分析处理问题的一门数学学科。

（2）函数与函数表达式的区别：函数表达式指的是解析式子，是表示函数的主要形式，而函数除了用表达式来表示，还可以用表格法、图象法等形式来表示，不要把函数与函数表达式等同起来。

2．反函数

定义 1.2　设 $y=f(x)$，$x\in D$，若对 $R(f)$ 中每一个 y，都有唯一确定且满足 y=$f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则按此对应法则就能得到一个定义在 R（f）上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作

$$f^{-1}:R(f)\to D \text{或} x=f^{-1}(y), y\in R(f).$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把上述函数改写成 $y=f^{-1}(x),\ x\in R(f)$.

（1）由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原来函数的值域，值域是原来函数的定义域。

（2）函数 y=f(x) 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象相同，这因为满足 y=f(x) 点（x,y）的集合与满足 $x=f^{-1}(y)$ 点 (x,y) 的集合完全相同，而函数 y=f(x) 与 $y=f^{-1}(x)$ 图象关于直线 y=x 对称。

（3）若 y=f(x) 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，则 $y=f\left[f^{-1}(y)\right]$，　　$x=f^{-1}\left[f(x)\right]$.

3．复合函数

定义 1.3　设 $y=f(u), u\in E, u=\varphi(x), x\in D$，若 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\phi$，则 y 通过 u 构成 x 的函数，称为由 y=f(u) 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$。

复合函数的定义域为 $\{x|x\in D \text{且} \varphi(x)\in E\}$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，$u$ 称为中间变量，$\varphi(x)$ 称为内函数，f(u) 称为外函数。

（1）在实际判断两个函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 能否构成复合函数，只要看 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域是否为非空集，若不为空集，则能构成复合函数，否则不能构成复合函数。

（2）在求复合函数时，只要指出谁是内函数，谁是外函数，例如 y=f(x)，y=g(x)，若 y=f(x) 作为外函数，y=g(x) 作为内函数。则复合函数 $y=f(g(x))$，若 $y=g(x)$ 作为外函数，$y=f(x)$ 作为内函数，则复合函数为 y=g(f(x))。

（3）我们要学会分析复合函数的复合结构，既要会把几个函数复合成一个复合函数，又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合。

4．　初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

大家一定要记住基本初等函数的定义域，值域，会画它们的图象，并且要知道这些函数在哪些区间递增，在哪些区间递减，是否经过原点？与坐标轴的交点是什么？以后我们常常要用到。

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数。

不是初等函数称为非初等函数。一般来说，分段函数不是初等函数，但有些分段函数可能是初等函数，例如

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}=|x|=\sqrt{x^2}\text{，是由 } y=\sqrt{u},\ u=x^2 \text{ 复合而成。}$$

5． 具有某些特性的函数

（1）奇（偶）函数

定义 1.4 设 D 是关于原点对称的数集，y=f(x)为定义在 D 上 的函数，若对每一个 $x\in D$ $($这时也有$-x\in D)$，都有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$，则称 y=f(x)为 D 上的奇（偶）函数。

定义域关于原点对称是函数为奇（偶）函数的必要条件。

若 f(x)为奇函数，则 f(0)=0，事实上，由定义知 f(-0)=-f(0)，有 f(0)=-f(0)，得 f(0)=0.

偶函数 f(x)的图象关于 y 轴对称；奇函数 f(x)的图象关于原点对称。

奇偶函数的运算性质:

奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数; 偶数个奇（偶）函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数;一奇一偶的乘积为奇函数；两个奇函数复合仍为奇函数;一奇一偶复合为偶函数;两个偶函数复合仍为偶函数.

（2）周期函数

定义 1.5 设 y=f(x)为定义在 D 上的函数，若存在某个非零常数 T，使得对一切 $x\in D$，都有

f(x+T)=f(x)，则称 y=f(x)为周期函数，T 称为 y=f(x)的一个周期。

显然，若 T 是 f(x)的周期，则 $kT(k\in Z,k\ne 0)$也是 f（x）的周期，若周期函数 f(x)的所有正周期中存在最小正周期，则称这个最小正周期为 f(x)的基本周期，一般地，函数的周期是指的是基本周期。

必须指出的是不是所有的周期函数都有最小正周期，例如 f(x)=c（c 为常数），因为对任意的正实常数 T，都有 f(x+T)=f(x)=c。所以 f(x)=c 是周期函数，但在正实数里没有最小正常数，所以，周期函数 f(x)=c 没有最小正周期。

（3）单调函数

定义 1.6 设 y=f(x)为定义在 D 上的函数，若对 D 中任意两个数 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,总有

$$f(x_1)\le f(x_2)\ \ (f(x_1)\ge f(x_2)),$$

则称 y=f(x)为 D 上的递增（递减）函数，特别地，若总成立严格不等式

$$f(x_1)< f(x_2)\ \ (f(x_1)> f(x_2)),$$

则称 y=f(x)为 D 上严格递增（递减）函数。

递增和递减函数统称为单调函数，严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数。

（4）分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的 x 范围有着不同的表达形式，则称该函数为分段函数。

注意分段函数不是由几个函数组成的，而是一个函数，我们经常构造分段函数来举反例，常见的分段函数有符号函数、狄里克雷函数、取整函数。

（5）有界函数与无界函数

定义　设 y=f(x)为定义在 D 上的函数，若存在常数 N≤M，使对每一个 $x \in D$ ，都有

$$N \le f(x) \le M$$

则称 f(x)为 D 上的有界函数，此时，称 N 为 f(x)在 D 上的一个下界，称 M 为 f(x)在 D 上的一个上界。

由定义可知上、下界有无数个，我们也可写成如下的等价定义，使用更加方便。

定义 1.7　设 y=f(x)为定义在 D 上的函数，若存在常数 M>0，使得对每一个 $x \in D$，都有

$$|f(x)| \le M$$

则 f(x)为 D 上的有界函数。

定义 1.8　设 y=f(x)为定义在 D 上的函数，若对每一个正常数 M（无论 M 多么大），都存在 $x_0 \in D$，使 $|f(x_0)| > M$ ，则称 f(x)为 D 上的无界函数。

（6）函数的延拓与分解

有时我们需要由已知函数产生新的函数来解决实际问题，这里我们从函数的特性出发，开拓由已知产生新的函数的方法。

设 $y = f(x), x \in [0, a]$，我考虑区间[-a,a]上的函数 F(x)，它是偶函数，且在[0,a]上，使 F(x)=f(x)，则应有 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, a], \\ f(-x) & x \in [-a, 0). \end{cases}$

称 F（x）是 f(x)的偶延拓

同样可给出 f(x)的奇延拓，即函数 F（x）在[-a,a]上的奇函数，且在（0,a）上，F（x）=f(x)，则应有 $F(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, a] \\ 0, \quad x = 0 \\ -f(-x), x \in [-a, 0) \end{cases}$ 这样，研究 f(x)只要，研究 F（x）就可以了。

同样，对于函数 y=f(x)，$x \in (a,b)$，可以构造一个以（b-a）为周期的周期函数 F（x），在（a,b）上，F（x）=f(x)，则有

$$F(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in(a,b) \\ f[x-n(b-a)], x\in(nb-(n-1)a,(n+1)b-na), n\in z \end{cases}$$

这就是函数 f(x)的周期延招，研究 f(x)只要研究 F（x）就可以了。

（二）重要定理与公式

定理 1.1（反函数存在定理）严格增（减）的函数必有严格增（减）的反函数。

第二节　函数极限与连续

一、内容精要

（一）　基本概念

1.函数极限的概念

（1）定义1.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$：若存在一个常数$A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon。$$

（2.）定义 1.10 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$：把（1）中“ $x>X$ ”换成“ $x<-X$ ”。

（3）定义 1.11 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$：把（1）中“ $x>X$ ”换成“ $|x|>X$ ”。

（4）定义 1.12 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$：设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内 $\overset{0}{U}(x_0)$ 有定义，若存在一个常数 A，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

（5）定义 1.13 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$：设 $f(x)$ 在 x_0 的某左半邻域 $\overset{0}{U}-(x_0)$ 内有定义，若存在一个常数 A，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$-\delta<x-x_0<0$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

此时也可用记号 $f(x_0-0)$ 或 $f(x_0^-)$ 表示左极限值 A，因此可写成

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)$或$\lim\limits_{x\to x_0}- f(x)=f(x_0{}^-)$

（6）定义 1.14 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$：设 $f(x)$ 在 x_0 的某右半邻域 $\overset{0}{U}+(x_0)$ 内有定义，若存在一个常数 A，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<8\ \delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。此时也可用 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0^+)$ 表示右极限 A。因此可写成

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)$或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$。

该定理是求分界点两侧表达式不同的分段函数在该分界点极限是否存在的方法，而如果在 x_0 的左右极限存在且相等，则在该点的极限存在，否则不存在。

（7）定义 1.15 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty:\forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)|>M$ 。此时称 $x\to x_0$时， $f(x)$ 是无穷大量。

而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ，只要把公式中“ $|f(x)|>M$ ”改成“ $f(x)>M$ ”，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ ，只要把上式中“ $|f(x)|>M$ ”改成“ $f(x)<-M$ ”。

（8）定义 1.16 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty:\forall M>0,\exists X>0$ 。当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)|>M$ 。

读者同理可给出 $\lim\limits_{x\to\infty}(+\infty$或$-\infty)\, f(x)=+\infty$或$-\infty$ 定义。

注： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（常数）与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的区别，前者是表明函数极限存在，后者指函数极限不存在，但还是有个趋于无穷大的趋势。因此，给它一个记号，但还是属于极限不存在之列，以后，我们说函数极限存在，指的是函数极限值是个常数。

（9）定义 1.17 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 。称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 是无穷小量。

（这里 x_0 可以是常数，也可以是 $\infty,+\infty,-\infty$ ，以后我们不指出都是指的这个意思）

（10）定义 1.18 若 $\exists\delta>0,\exists M>0,$当$x\in\overset{0}{U}(x_x,\delta)$ 时，都有 $|f(x)|\le M$ ，称 $f(x)$当$x\to x_0$ 时是有界量。

2.无穷小量阶的比较，无穷小量与无穷大量关系

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ，

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是 $g(x)$ 的高阶无穷小量，

记作 $f(x)=\circ(g(x))(x\to x_0).$ 。

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ，称 $f(x)$当$x\to x_0$ 时是 $g(x)$ 的等价无穷小量，记作

$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$ ，。

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(\text{常数})\neq 0,$ ，称 $f(x)$当$x\to x_0$ 时是 $g(x)$ 的同价无穷小量。

记作 $f(x)\sim cg(x)(x\to x_0)$

（4）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c(\text{常数})\neq 0(k>0\text{常数})$，称 $f(x)\text{当}x\to x_0$ 时是 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量。

由等价无穷量在求极限过程中起到非常重要的作用，因此，引入

$$\text{若}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\text{。记作 } f(x)\sim g(x)(x\to x_0)\text{，}$$

如果 $f(x),g(x)$ 均是无穷小量，称为等价无穷小量；如果 $f(x),g(x)$ 均是无穷大量，称为等价无穷大量；如果 $f(x),g(x)$ 既不是无穷小也不是无穷大，我们称为等价量。

例如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\text{常数})\neq 0$，则 $f(x)\sim A(x\to x_0)$。

注：A 不能为零，若 A=0， $f(x)$ 不可能和 0 等价。

3.函数连续的概念。

定义 1.19　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称$f(x)$在$x=x_0$ 处连续。

用$\varepsilon-\delta$ 语言可写为

定义 1.20　设 $f(x)$在x_0 的某邻域$U(x_0)$ 内有定义，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，称 $f(x)$在$x=x_0$处 连续。

用函数值增量 Δy 形式可写为

定义 1.21　若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

如果　$f(x)$在$x=x_0$ 处不连续，称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$在$x=x_0$ 处左连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$在$x=x_0$ 处右连续。

间断点的分类：

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\text{常数})$,但$f(x)$在$x=x_0$处不连续,称$x=x_0$是$f(x)$的可去间断点。

若 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点，只须补充定义或改变 $f(x)$在$x=x_0$处的函数值,使 函数在该点连续。但须注意，这时函数与 $f(x)$ 已经不是同一个函数但仅在 $x=x_0$ 处不同，在其它点相同。我们正是利用这一性质去构造一个新的函数 $F(x)$，使 $F(x)$ 在某闭区间上处处连续，因而有某种性质。当 $x\neq x_0$ 时，也具有这种性质。而 $x\neq x_0$ 时， $F(x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $x\neq x_0$ 的范围内也具有这种性质，从而达到了我们的目的。

例如 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

但 $f(x)$在$x=0$处没定义,知$f(x)$在$x=0$处不连续,设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$ 则$F(x)$在

$x=0$处连续，但$F(x)$与 $f(x)$定义域不同，虽然

$F(x)$与$f(x)$不是同一函数,但在$x\neq 0$处完全相同，

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0).\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)$,但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，称$\left|f(x_0+0)-f(x_0-0)\right|$为$f(x)$ 的跳跃度。

（1）（2）两种类型的特点是左右极限都存在，我们统称为第一类间断点。

（3）若 x_0 处，左、右极限至少有一个不存在，我们称
$x=x_0$为$f(x)$的第二类间断点。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，我们也称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷型间断点，属于第二类间断点。

（二）重要定理与公式

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

定理 1.3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

定理 1.4 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(常数) $\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

1.无穷小量的性质：

若$\alpha_1(x),\alpha_2(x),\cdots,\alpha_m(x)$当$x\to x_0$时,均为无穷小量，则

（i） $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)+\cdots+c_m\alpha_m(x)\right]=0.$

其中$c_1,c_2,\cdots c_m$均为常数。

（ii） $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)\alpha_2(x)\cdots\alpha_m(x)=0$。

（iii）若 $f(x)$当$x\to x_0$时是有界量，$\alpha(x)$当$x\to x_0$时是无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\alpha(x)=0$。

2.无穷大量的性质：

（1）有限个无穷大量之积仍是无穷大量。

（2）有界量与无穷大量之和仍是无穷大量。

无穷小量与无穷大量之间的关系：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,$则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ ；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,$且$\exists\delta>0,$当$x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$时$f(x)\neq 0,$则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$。

3.函数极限的性质

在下述六种类型的函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$　　(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

它们具有与数列极限相类似的一些性质，我们以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为例，其它类型极限的相应性质的叙述只要作适当修改就可以了。

性质 1（唯一性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它只有一个极限。

性质 2（局部有界性）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0)$，使 $f(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内有界。

注意：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，只能得出 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界，得不出 $f(x)$ 在其定义域内有界。

性质 3　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$且$A<B$，则存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$，使 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$ 时，都有 $f(x)<g(x)$。

性质 4（局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0($或$<0)$，则对任何常数 $0<\eta<A($或$A<\eta<0)$，存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0)$，使得对一切 $x\in\overset{0}{U}(x_0)$，都有 $f(x)>\eta>0($或$f(x)<\eta<0)$ 成立。

性质 5（不等式）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ ，且存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$，使得对一切 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta_0)$，都有 $f(x)\le g(x)$,则$A\le B$。

性质 6 （复合函数的极限）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ ，且存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta')$，当 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta')$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$ ，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 。

性质 6 是求极限的一个重要方法——变量替换法，即

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) \xlongequal[\text{且}x\to x_0,\varphi(x)\to u_0]{\text{令}\varphi(x)=u} \lim_{u\to u_0} f(u)=A$$ 。

性质 7（函数极限的四则运算）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则函数 $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), cf(x)$($c$为常数)在$x\to x_0$时极限均存在且

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$； （2） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$,则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且有

（4） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$。

利用极限的四则运算，可得下列重要结果。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x\ \ +b_m}(a_0,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_m\text{均为常数},a_0\neq 0,b_0\neq 0)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\text{L}+a_{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\text{L}+b_{m-1}\dfrac{1}{x^{m-1}}+b_m\dfrac{1}{x^m}}=\begin{cases}0, n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, n=m\\ \infty, n>m\end{cases}$$

上面的结论可作为公式用。

性质 8（归结原则或海涅（Heine）定理） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是：

$\forall \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0(x_n\neq x_0, n=1,2,\cdots)$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等。

逆否定理:若存在两个数列$\{x_n'\},\{x_n''\}\subset \overset{0}{U}(x_0)$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=x_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=A, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')=B, A\neq B$ 或存在$\{x_n\}\subset \overset{0}{U}(x_0)$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在，则 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x_0)$ 不存在。

此定理是判断函数极限不存在的一个重要方法。

4.函数连续的性质

若函数 $f(x)$在点$x=x_0$处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，利用极限的性质 1-5 可得到函数在 $x=x_0$ 连续的局部有界性，局部保号性，不等式等，只要把 $\overset{0}{U}(x_0)$改成$U(x_0)$ 即可，读者自己叙述出来。

利用极限的四则运算，我们有

性质 1（连续函数的四则运算）若 $f(x),g(x)$在点$x=x_0$处连续，则 $f(x)\pm g(x), f(x)g(x), cf(x)(c$为常数$)\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在$x=x_0$处也连续。

性质 2　若$u=\varphi(x)$在x_0处连续, $y=f(u)$在$u_0=\varphi(x_0)$处连续，则 $y=f(\varphi(x))$在$x=x_0$处也连续且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$

在满足性质 2 的条件下，极限符号与外函数 f 可交换顺序，如果仅要可交换顺序，有

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0, y=f(u)$在$u=u_0$处连续,则　$\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$。

证　设 $g(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\neq x_0,\\ u_0, x=x_0,\end{cases}$ 则 $g(x)$在$x=x_0$处连续，又 $y=f(u)$在$u=u_o=g(x_0)$

处连续，由性质 2 知 $\lim\limits_{x\to x_o} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_o} g(x))$。

由于 $x\to x_0$,要求$x\neq x_0$,有$g(x)=\varphi(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to x_o} f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_o}\varphi(x))$。

在这里，我们巧妙地利用可去间断点的性质，构造一个连续函数，以满足所需的条件，上面的性质 2 及推论也是求函数极限的一个重要方法。

即极限符号与外函数 f 交换顺序，把复杂函数极限转化为简单函数极限。

定理 1.5 $f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处既是左连续又是右连续。

定理 1.6　初等函数在其定义域上连续。

5.闭区间上连续函数的性质

定理 1.7　（最大值与最小值定理）若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上一定能取到最大值与最小值，即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$, $f(x_1)=M, f(x_2)=m$ ，使得对一切 $x\in[a,b]$，都有 $m\leq f(x)\leq M$ 。

推论 1.7.1　若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界。

定理 1.8（根的存在定理或零值点定理）若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$。

推论 1.8.1　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$,c为介于$f(a),f(b)$之间的任何常数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=c$。

推论 1.8.2　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则值域$R(f)=[m,M]$。

这几个定理非常重要，请大家要记住这些定理的条件与结论，并会运用这些定理去解决问题。

6.重要的函数极限与重要的等价量

利用初等函数的连续性及极限符号与外函数的可交换性及等价量替换，夹逼定理可得到下面的重要的函数极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

(4) . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\text{设}e^x-1=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a(a>0,a\neq 1\text{为常数})$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^b-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{b\ln(1+x)}-1}{b\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot b=b(b\text{为常数},b\neq 0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{\text{设}\arcsin x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\overset{\text{设}\arctan x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t=1\times 1=1$.

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0(k>0\text{ 常数})$.

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0(a>1\text{ 常数},k\text{为常数})$.

(11) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0,\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b(a,b\text{均为常数})$,则

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{V(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{V(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} V(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} V(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \ln u(x)} = e^{b\ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$。

注：不仅要记住这些公式的标准形式，更要明白一般形式。即上面公式中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_o$ 时，$f(x)\to 0$，结论依然成立。

利用上述重要极限，我们可以得到下列对应的重要的等价无穷小量，在解题中经常要利用他们

当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x, \ln(1+x)\sim x, e^x-1\sim x, a^x-1\sim x\ln a(a>0, a\neq 1,\text{常数})$.

$(1+x)^b-1\sim bx(b\neq 0,\text{常数}), \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x, 1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$.

注：上式中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$.结论依然成立。

例如 $\sin f(x)\sim f(x)(\text{若}x\to x_0\text{时}, f(x)\to 0)$。

此外，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A(\text{常数})\neq 0, f(x)\sim A(x\to x_0)$.

7.等价量替换定理 1.9

若（1） $f(x)\sim f_1(x), g(x)\sim g_1(x), h(x)\sim h_1(x)(x\to x_0)$ ；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty)$ ；，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty).$$

证 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{g(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{h_1(x)}{h(x)} = A\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = A(\text{或}\infty)$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty)$.

这个定理告诉我们，在求函数极限时，分子、分母中的因式可用它们的简单的等价的量来替换，以便化简，容易计算。但替换以后函数极限要存在或为无穷大。需要注意的是，分子、分母中加减的项不能替换，应分解因式，用因式替换，包括用等价无穷小量、等价无穷大量或一般的等价量来替换。

8.夹逼定理 1.10

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta')$，使得对一切 $x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta')$，都有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$。

9．定理 1.11 洛必达$(L'Hospital)$法则 I

设（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ；

（2）存在x_0的某邻域$\overset{0}{U}(x_0)$，当$x \in \overset{0}{U}(x_0)$时，$f'(x), g'(x)$都存在，且 $g'(x) = 0$ ；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(或\infty)$，则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(或\infty)$.

定理 1.12 洛必达$(L'Hospital)$法则 II，设

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ；

（2）存在x_0的某邻域$\overset{0}{U}(x_0)$，当$x \in \overset{0}{U}(x_0)$时，$f'(x), g'(x)$都存在且 $g'(x) \neq 0$ ；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(或\infty)$，则$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(或\infty)$.

注 1：上述两个法则中的$x \to x_0$改成$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$时，条件（2）只须作相应的修改，结论依然成立。

注 2：在用洛必达法则求极限之前，应尽可能把函数化简，或把较复杂的因式用简单等价的因式来替换，以达到简化，再利用洛必达法则。

注 3：利用洛必达法则求极限时，可在计算的过程中论证是否满足洛必达法则的条件，若满足洛必达法则的条件，结果即可求出；若不满足，说明不能使用洛必达法则，则需用其它求极限的方法。此外，可重复使用洛必达法则，但只能用有限次。

第三节　数列极限

§3.2 内容提要与释疑解难

一、内容精要

（一）　基本概念

数列极限

- 数列极限的定义
- 用定义证明数列极限的方法
  - 直接证法
  - 间接证法
- 收敛数列的性质
  - 唯一性
  - 有界性
  - 不等式
  - 保号性
  - 四则运算
- 判断数列收敛的准则
  - 夹逼定理
  - 单调有界定理
- 判断数列发散的准则
  - 两个子列极限存在但不相等
  - 有一个子列发散
  - 数列无界
- 重要的数列极限
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ **(k>0 常数)**
  - $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ **（|q|<1 常数）**
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ **(a>0 常数)**
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}=0\left(k>0\text{常数}\right)$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\left(a>1,a,k\text{为常数}\right)$

1.数列极限的概念

定义 1.22 设$\{a_n\}$是一个数列，a是一个确定的常数，若对任意给定的正数ε，总存在一个自然数 N，使得 $n>N$时，都有$|a_n - a| < \varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$的极限是 a，或者说数列$\{a_n\}$收敛于 a，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

注意：（1） ε的任意性，ε的作用在于衡量 a_n与 a 的接近程度，从而限制ε小于某一个正常数，不影响衡量 a_n与 a 接近的程度，但不能限制大于某一个正常数，定义中的ε可用 2ε、$\sqrt{\varepsilon}$ 或 ε^2等本质上是任意的正常数来替代，同样也可把“＜”号换成“≤”号。

（2） N的相应性。一般说，N 是随着ε的变小而变大，但并不是由ε唯一确定，因为给定ε，确定 N，当 $n>N$，有$|a_n - a| < \varepsilon$，则 $N+1$，$N+2$，…同样也符合要求。此外，$n>N$中的 N只是下标的一个界线，要求 n是自然数，故 N可以是实数，而且 $n>N$也可改成 $n\geq N$。

（3）几何意义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，表明 a的任何给定的ε邻域中都含有数列$\{a_n\}$中除了有限项以外的全有项。

（二）重要定理与公式

夹逼定理 1.12 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，若存在$N_0$，当 $n>N_0$时，都有$a_n \le c_n \le b_n$，则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

夹逼定理适合数列的项有多项相加或相乘式$n\to\infty$时，有无穷项相加或相乘，且不能化简，不能利用极限的四则运算，此时可尝试用夹逼定理。夹逼定理不仅能证明数列极限并可求出极限的值。

单调有界定理 1.13 数列$\{a_n\}$递增（递减）有上界（下界），则数列$\{a_n\}$收敛，即单调有界数列有极限。

单调有界定理适合数列的项用递推关系式给出的数列。单调有界定理仅能证明数列极限存在，至于数列极限的值是多少只能用别的方法去解决。

1.收敛数列的性质

性质 1 （唯一性）若数列$\{a_n\}$极限存在，则极限值是唯一的。

性质 2 改变数列的有限项，不改变数列的收敛性与极限。

有了性质 2，对于判定数列敛散性的定理中要求从第一项就具有某种性质的条件可减弱为从某一项开始具有该性质，结论依然成立。

性质 3（有界性）数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$为有界数列，即存在某正常数 M，使得对一切正整数 n，都有$|a_n| \le M$。

推论 若数列$\{a_n\}$无界，则数列$\{a_n\}$发散。

该推论是判断数列$\{a_n\}$发散的一个简单有效的办法。

性质 4　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$且 $a<b$，则存在 N_0，当 $n>N_0$时（即 n 充分大时），都有 $a_n<b_n$。

推论（保号性），若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0 (a < 0)$，则对于满足 $0<\eta<a(a<\eta<0)$的任何常数 η，存在 N，当 $n>N$ 时，都有 $a_n>\eta>0(a_n<\eta<0)$。

性质 5（不等式）若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且存在 N_0，当 $n>N_0$时，都有 $a_n\geq b_n$，则 $a\geq b$.

注意在性质 5 中，即使存在 N_0，当 $n>N_0$时，都有 $a_n>b_n$，也不能保证 $a>b$.

例如　$a_n = \dfrac{1}{n}$，$b_n = -\dfrac{1}{n}$，$a_n>b_n$（n=1，2，…），但$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，而 0=0。

性质 6　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：数列$\{a_n\}$的任何一个子数列都收敛且极限相等。

逆否定理　若数列$\{a_n\}$有两个子数列极限存在不相等或有一个子数列极限不存在，则数列$\{a_n\}$发散。

该定理是判断数列$\{a_n\}$发散的一个重要方法。

性质 7　（数列极限的四则运算）若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则数列$\{a_n\pm b_n\}$，$\{a_nb_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$（$b\neq 0$）的极限都存在，且

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$；

特别地，当 k 为常数时，有$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ka$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$.

注意：数列极限的四则运算前提是两个数列极限都存在，并可把数列极限推广到有限项极限的四则运算，但数列极限的运算法则不能推广到无限项.

公式 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m + a_1n^{m-1} + \cdots + a_{m-1}n + a_m}{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \cdots + b_{k-1}n + b_k} = \begin{cases} 0, & m < k, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = k, \\ \infty, & m > k. \end{cases}$$

（其中 a_0，a_1，…，a_m，b_0，b_1，…，b_k均为常数且 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$）

这个例子表明当分子最高次幂小于分母最高次幂时，分式极限为零；当分子最高次幂等于分母最高次幂时，分式极限就是分子、分母最高次幂的系数之比；当分子最高次幂大于分母最高次幂时，分式的极限为∞，以后该例题的结果可以作为结论用，同理可证对分子、分母的每一项幂指数是正数时结果仍成立.

第二章　　导数与微分

大纲要求

了解 导数的物理意义，微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，高阶导数的概念

会 求平面曲线的切线方程和法线方程，用导数描述一些物理量，求函数的微分，求简单函数的高阶导数，求分段函数的导数，求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数

理解 导数和微分的概念，导数与微分的关系，导数的几何意义，函数的可导性与连续性之间的关系，
掌握 导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，基本初等函数的导数公式

内容精要

（一） 基本概念

1.导数的概念

导数概念的实际背景是曲线上一点切线斜率与质点作变速直线运动在某时刻的瞬时速度.

定义 2.1 设函数 y=f(x)在点 x_0的某邻域 $U(x_0)$内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 f(x)在点 x_0可导，并称此极限值为 f(x)在点 x_0处的导数（或微商），记作

$f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$或$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

若极限不存在，则称函数 y=f(x)在点 x_0不可导

注 1 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$用于涉及已知抽象函数可导，证明其它结论或已知其它条件，证明函数可导

注 2 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ 用于利用定义求函数的导函数

注 3 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$用于求函数在一点的导数

特别

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A(\text{常数})=f'(0),\text{若}f(0)=0,\ \text{则}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A(\text{常数})=f'(0).$$

反之　若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ （常数）且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f'(0)=A$.

事实上，由 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，利用上面结果知结论正确。

注 4　要弄清导数定义的本质。即

（1）若 $t\to a$ （a 可以是常数，可以是 $\infty,+\infty$ 或 $-\infty$）时，有 $\varphi(t)\to 0$ （$\varphi(t)$ 从 0 两侧趋于 0），且

$$\lim_{t\to a}\frac{f[x_0+\varphi(t)]-f(x_0)}{\varphi(t)}=A(\text{常数}),$$

则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=A$。

证

$$\lim_{t\to a}\frac{f[x_0+\varphi(t)]-f(x_0)}{\varphi(t)}\underline{\underline{\text{设}\varphi(t)=\Delta x}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A(\text{常数})=f'(x_0)\text{。}$$

（2）若 $t\to a$ （a 可以是常数，可以是 $\infty,+\infty$ 或 $-\infty$）时，$\varphi(t)\to x_0$ （$\varphi(t)$ 从 x_0 两侧趋于 x_0），且

$$\lim_{t\to a}\frac{f(\varphi(t))-f(x_0)}{\varphi(t)-x_0}=A(\text{常数})$$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=A$.

证 $$\lim_{t\to a}\frac{f(\varphi(t))-f(x_0)}{\varphi(t)-x_0}\underline{\underline{\text{设}\varphi(t)=x}}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})=f'(x_0)\text{。}$$

定义 2.2　若

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})\triangleq f'_-(x_0)$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左导数，

定义 2.3 $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})\triangleq f'_+(x_0)$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的右导数.

定理 2.1　$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=A\text{且}f'_+(x_0)=A$.

这个定理是判断在分界点 x_0 两侧表达式不同的分段函数在 x_0 处是否可导的一种方法。

例　$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\le x_0,\\ \psi(x), & x>x_0.\end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\psi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

若（1）（2）两式的极限存在且相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，否则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

若 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0,\end{cases}$

研究 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否可导就不必用左右导数的定义，只须用导数定义，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-a}{x-x_0} \qquad (3)$$

如果（3）式极限存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，否则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导。

（3）几何意义　若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率 且

切线方程为　　　　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；

法线方程为　　　　$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)(f'(x_0)\neq 0)$。

若 $f'(x_0)=0$，此时切线方程为 $y=f(x_0)$，法线方程为 $x=x_0$。

定理 2.2 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，反之不一定。

例如　$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导。

逆否定理 2.3　若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导。

这个定理为判断 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导提供了一个简便方法：如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限不存在或不连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，就不必用导数定义去验证了。

（4）若 $f(x)$ 在区间 X 上每一点都可导，即 $\forall x\in X$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

按函数定义知 $f'(x)$ 是区间 X 上的函数，称为 $f(x)$ 在区间 X 上的导函数或简称为导数。

如果求出了区间 X 上的导函数，则 $\forall x_0\in X$，有 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

由此可知求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数有两种方法：

（1）用定义；　（2）若能求出 $f'(x)$ 或 $f'(x)$ 已知且 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处有意义，则 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$。

根据具体情况选用一种方法。

2.微分定义 2.4　设 y=f(x)在 x 的某邻域 U(x)内有定义，若 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$可表示为

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$,其中 A 是与$\Delta x$无关的量，则称 y=f(x)在点 x 处可微，$A\Delta x$是$\Delta y$的线性主部，并称其为 y=f(x)在 x 处的微分，记为dy.，即$dy = A\Delta x$.

（二）重要定理与公式

1．导数的四则运算　　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处可导，则 $u\pm v$，$uv, \frac{u}{v}(v \neq 0)$在点 x 处可导，且

(1) $(u\pm v)' = u' \pm v'$；(2) $(uv)' = u'v + uv'$；特别地 $v=c$（常数），$(cu)' = cu'$；

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$,特别地$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}\quad (v \neq 0)$

2．定理 2.4（反函数求导法则）　设 $y=f(x)$为函数 $x = \varphi(y)$的反函数，若$\varphi(y)$在点 y_0的某邻域内连续，严格单调且$\varphi'(y_0) \neq 0$，则 $f(x)$在点$x_0(x_0 = \varphi(y_0))$可导，且

$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\left.\frac{dx}{dy}\right|y = y_0}$。

推论 2.4.1　设 $y=f(x)$为函数 $x = \varphi(y)$的反函数，若$\varphi(y)$严格单调且$\varphi'(y) \neq 0$,则$f'(x)$存在且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}或\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}。$$

3．定理 2.5（复合函数求导法则）

设函数$u = \varphi(x)$在 $x=x_0$处可导，y=f(u)在$u = u_0 = \varphi(x_0)$处可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$在$x = x_0$处可导且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0} 或 \left[f(\varphi(x)\right]\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'[\varphi(x_0) \cdot \varphi'(x_0)]$$

推论 2.5.1 若$u = \varphi(x)$可导，y=f(u)可导，则$y = f(\varphi(x))$可导且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}或[f(\varphi(x))]' = f'(u)\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

导数是解决问题的工具，复合函数的求导特别重要，要真正理解并掌握，因为我们遇到的函数大多数是复合函数，只有掌握复合函数求导，才能准确求出导函数，大

家要学会所谓的“层层剥皮”法，即把所给复合函数写成 $y = f(\varphi(x))$，要求 f(u)是基本初等函数，即 f'(u)可求出，从而 $\frac{dy}{dx} = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$

若 $\varphi'(x)$ 直接能求出，从而就求出了复合函数的导数，若 $\varphi(x)$ 又是复合函数，又可把 $\varphi(x) = g(h(x))$，要求 g(u)是基本初等函数，即 g'(u)可求出，从而 $\varphi'(x) = g'(h(x))h'(x)$

若 h'(x)直接能求出，从而求就出了 $\varphi'(x)$，也求出 $\frac{dy}{dx}$，若 h(x)又是复合函数，再如此下去…直到最后一个内函数或者是基本初等函数或者是简单函数（由基本初等函数经过四则运算得到的函数），就是最后一个内函数导数可求出来，从而就求出原函数的导数。即反复利用两个函数复合的求导，这就是“层层剥皮法”

4　基本初等函数的求导公式(略)

注 1 由三解函数的导数有时是“+”号，有时是“-”号，用下面的方法记，带有“正”字的三角函数或反三角函数导数前面取“+”号，带有“余”字的三角函数与反三角函数导数前面取“-”号。

注 2 y=arc sinx,　　y=arc cosx　　在定义域中 x=±1 处不可导。

若 $y = x^{\alpha}$ 在 x=0 处有定义（此时 α>0 且 f(0)=0），由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}}{x} = x^{\alpha-1} = \begin{cases}\infty, & 0<\alpha<1,\\ 1, & \alpha=1,\\ 0, & \alpha>1.\end{cases}$$

知 f(x)=x^{α} 当 0<α<1 时，在 x=0 处不可导，其余的所有的基本初等函数在其定义域内的每一点都可导。

注 3 由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得的函数，因此，有了上述求导公式及求导法则，就可按部就班地计算出初等函数的导数，但求导之前尽量的化简，最好能化成加减，因为函数越简单，求导越容易，函数加减求导数比函数乘除的导数要容易。

注 4 而分段函数是在 x 不同取范围内用不同的初等函数表达式，因此，不在分界点时，可直接利用求导公式，在分界点需用左、右导数的定义。

关于求分界点左、右导数还有下面的定理

定理 2.6　若 $\exists\delta > 0$, $f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上连续，在$(x_0, x_0+\delta)$内可导且 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = A$(常数)，则$f'_+(x_0)$存在且$f'_+(x_0) = A$。

证　由于 $\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = A(常数) = f'_+(x_0)$

同理有

定理 2.7　若$\exists\delta>0$, $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]$上连续，在$(x_0-\delta,x_0)$内可导且$\lim\limits_{x\to x_0}-f'(x)=A$（常数),则$f'-(x_0)$存在且$f'-(x_0)=A$。

推论 2..7.1　若$\exists\delta>0$, $f(x)$在$U(x_0,\delta)$上连续，在$\overset{0}{U}(x_0,\delta)$内可导且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$(常数),则$f'(x_0)$存在且$f'(x_0)=A$.

定理 2.8（变上限求导定理）　若 $f(x)$　$[a,b]$上连续，则$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$。

推论 2.8.1　若 f(t)连续，u=u(x)可导，则$\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt=f(u(x))u'(x)$.

证$\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{du}\int_a^{u} f(t)dt\cdot\dfrac{du}{dx}=f(u)\cdot u'(x)=f(u(x))u'(x)$.

推论 2.8.2　若 f(t)连续，u(x)、v(x)均可导，则$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x).$

证　$\dfrac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}[\int_a^{u(x)} f(t)dt-\int_a^{v(x)} f(t)dt]=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x).$

记住了推论 2.8.2，变上限函数求导定理，推论 2.8.1 就成为推论 2.8.2 的特例。在运用这个定理时，要注意被积函数只能是积分变量的表达式，如果不是这种形式，不能直接利用这个公式。

5.高阶导数的运算法则　若 u(x),v(x)在 x 处 n 阶导数存在，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};\qquad (cu)^{(n)}=cu^{(n)}(c\text{为常数})；$$

$$(u\cdot v)^{(n)}=c_n^0u^{(n)}v^{(0)}+c_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+c_n^{\,k}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+c_n^nu^{(0)}v^{(n)}.$$

其中$u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v.$

由于乘积的高阶导数公式较复杂，而且没有商的高阶导数，从而使得求高阶导数更加麻烦，更需要在求导之前，对函数进行化简，尽量化成加减，对于乘积的高阶导数公式，若满足下列条件一定用：若 f(x)=u(x)v(x)，其中有一个因式高阶导数有公式看成 u(x)，另一个因式经过几次求导为零看成 v(x)，这时用乘积的高阶导数公式较方便，因为不论求多少阶导数，$f^{(n)}(x)$仅有有限几项。

6．部分基本初等函数的高阶导数公式

(1)　$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}),$　　　(2)　$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}),$

(3)　$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^{(n)}(a>0,a\neq1\text{常数}),$　　　(4)　$(e^x)^{(n)}=e^x,$

(5)
$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}(\alpha\text{为常数}),(x^n)^{(n)}=n!,\quad (x^n)^{(m)}=0(m>n),$

（6）

$$(\ln x)^{(n)}=[(\ln x)']^{(n-1)}=(x^{-1})^{(n-1)}\underline{\underline{用公式(5)}}-1(-1-1)\cdots[-1-(n-1)+1]x^{-1-(n-1)}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

类似我们还可得到$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\frac{\pi}{2}),[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}(n-1)!(1+x)^{-n}$,

定理 2.9 f(x)在 x 处可微$\Leftrightarrow$ $f(x)$在 x 处可导且 A=f'(x)

由于根据微分的定义验证一个函数可微是比较麻烦的，有了这个定理，只要验证函数是否可导，如果函数可导，就可微，否则就不可微。由于若 f(x)可微时，A=f'(x)，知$dy=f'(x)\Delta x$，特别地$dx=(x)'\Delta x=\Delta x$, 于是

$$dy=f'(x)\cdot dx\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=f(x).$$

因此，导数等于 dy 与 dx 的商，故导数又称为微商。

由于 dy=f'(x)dx，所以将导数公式表中的每个导数乘以自变量的微分 dx，便得到了微分公式。

定理 2.10　若$u=\varphi(x)$在点 x 处可微，y=f(u)在$u(u=\varphi(x))$处可微，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点 x 处可微，且 dy=f'(u)du.

这里 u 是中间变量，它与当 x 是自变量时，dy=f'(x)dx 的形式一样，我们称该性质为一阶微分形式不变性。

即若 y=f(u)可微，不论 u 是自变量，还是中间变量，都有 df(u)=f'(u)du.

微分的四则运算　若 u=u(x),v=v(x)在 x 处均可微，则

（1）$d(u\pm v)=du\pm dv$；　　　（2）$d(uv)=udv+vdu$，特别 d(cu)=cdu（c 为常数）；

（3）$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}(v\neq 0)$，特别地$d(\frac{1}{v})=\frac{-dv}{v^2}(v\neq 0).$

第三章 中值定理及导数的应用

大纲要求

了解柯西中值定理，曲率、曲率圆与曲率半径的概念

会 用柯西中值定理，用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数$f(x)$具有二阶导数。当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$的图形是凸的），求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，描绘函数的图形，计算曲率和曲率半径.

理解罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理，函数的极值概念，

掌握用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理，用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，函数最大值和最小值的求法及其应用.

内容精要

（一） 基本概念

1．定义 2.5 若存在 x_0的某邻域$U(x_0,\delta)$，使得对一切$x\in U(x_0,\delta)$，都有

$$f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$为极大值（极小值），称 x_0为极大（小）值点。极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

若$f'(x_0)=0$，称$x=x_0$为驻点或稳定点。

定义 2.6 设$f(x)$在(a,b)内可导,且曲线$y=f(x)$在曲线上任意一点切线的上方,则称曲线在该区间内是上凹或下凸;如果曲线在曲线上任意一点切线的下方,则称曲线在该区间内是下凹或上凸.

定义 2.7 设$f(x)$在x_0的某领域内连续,且$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$上凹与下凹的分界点,称$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点或变凹点。

注：极值点与拐点的区别,极值点是取到极值的横坐标x_0,拐点是曲线上的点 是一对有序数组$(x_0,f(x_0))$.

拐点的横坐标一定包含在$f''(x)=0$与$f''(x)$不存在的点之中.

定义 2.8 设函数$f(x)$在$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)(a\le b)$上有意义,若存在一个已知的直线$L: y=ax+b$ （a,b为常数),使得曲线$y=f(x)$上的动点 $M:(x,y)$,当它沿着曲线无限远离原点(即 $x\to\infty$)时,点 M 到直线 L 的距离 d趋于 0，则称直线 L 是曲线$y=f(x)$当$x\to\infty$时的斜渐近线.

定义 2.9 若曲线上点 M $(x,f(x))$沿着曲线无限远离原点时,M 到直线$x=x_0$距离的极限为零，则称 x=x_0是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线或铅垂渐近线.

（二）重要定理与公式

费马（Femat）定理 2.11（取到极值的必要条件）

设 f(x)在点 x_0处取到极值，且 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0)=0.$

反之不真，例如 $f(x)=x^3$， $f'(x)=3x^2$， $f'(0)=0,$ 但 f(0)不是极值。

费马定理常用于证明 f(x)=0 有一个根，找一个 F(x)，使 $F'(x)=f(x).$ 证明 F（x）在某点 x_0处取到极值且 $F'(x_0)$存在，由费马定理知 $F'(x)=0,$ 即 $f(x_0)=0.$

罗尔（Rolle）定理 2.12　设 f(x)在闭区间$[a,b]$上满足下列三个条件：

（1） $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导；（3）$f(a)=f(b),$ 则至少存在一点$\xi\in(a,b),$ 使 $f'(\xi)=0.$

推论 2.12.1　在罗尔定理中，若 f(a)=f(b)=0，则在（a,b）内必有一点ξ，使 $f'(\xi)=0,$ 即方程 f(x)=0 的两个不同实根之间，必存在方程 f'(x)=0 的一个根。

罗尔定理的应用：1. 证明 $f(x)$=0 有一个根，找到一个 $F(x)$，使$F'(x)=f(x)$，验证 $F(x)$ 在某闭区间$[a,b]$上满足罗尔定理条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b),$ 使$F'(\xi)=0,$ 即$f(\xi)=0$。2. 证明适合某种条件ξ的等式：把待证含有ξ的等式，通过分析转化为$F'(\xi)=0$形式，对 F(x)应用罗尔定理即可。

拉格朗日（Lanrange）定理 2.13　若 f(x)在闭区间[a,b]上满足下列二个条件：

（1）f(x)在闭区间[a,b]上连续 ；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b),$ 使$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$

拉格朗日定理的结论常写成下列形式： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$

上式中当 a>b 时公式仍然成立，即不论 a,b 之间关系如何，ξ总介于 a,b 之间，由

$0<\dfrac{\xi-a}{b-a}=\theta<1,$ 得$\xi=a+\theta(b-a),0<\theta<1,$ 所以

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),0<\theta<1.$$

拉格朗日定理是连结函数值与导函数值之间的一座桥梁，特别适合给出导数条件，要证明函数值关系的有关结论，拉格朗日定理主要应用是证明不等式.

单调性定理 2.14　设 f(x)在区间 I （I 可以是开区间，可以是闭区间，也可以是半闭半开区间，也可以无穷区间)上连续，在 I 内部可导（不需要在端点可导），

（1）若 $x\in$ I 内部， $f'(x)\ge 0,$ 则 f(x)在区间 I 上递增。

（2）若 $x\in$ I 内部， $f'(x)\le 0,$ 则 f(x)在区间 I 上递减。

（3）若 $x\in$ I 内部， $f'(x)\equiv 0,$ 则 f(x)在区间 I 上是常值函数。

若（1）中 $f'(x)\ge 0$改成$f'(x)>0$，则 f(x)在区间 I 上严格递增，

若（2）中 $f'(x)\le 0$改成$f'(x)<0$，则 f(x)在区间I 上严格递减。

推论 2.14.1 若 f(x)在区间I 上连续，在区间I 内部可导，当 $x\in$ I 内部，$f'(x)\ge 0(\le 0)$ 且 f(x)在I 的任何于区间上，$f'(x)\ne 0$,则 f(x)在区间I 上严格递增（减）。

证 由 $f'(x)\ge 0$，知 f(x)在区间I 上递增，假设 f(x)在I 上不是严格递增，即存在 $x_1,x_2\in$ I且$x_1<x_2$,有$f(x_1)=f(x_2)$,由$f(x)$在$[x_1,x_2]$上递增，所以任给 $x\in[x_1,x_2]$，有

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)=f(x_1),\qquad \text{从而}\quad f(x)\equiv f(x_1),x\in[x_1,x_2]$$

所以 $f'(x)\equiv 0,x\in[x_1,x_2]$与条件矛盾，故 f(x)在区间I 上严格递增，对于 $f'(x)\le 0$，同理可证 f(x)在I 上严格递减。

单调性定理及推论是证明函数在某区间上（严格）单调或是常值函数和求函数（严格）单调区间的重要方法。

柯西（Cau chy）定理 2.15 设 f(x),g(x)在闭区间$[a,b]$上满足下列条件：

（1）f(x),g(x)在$[a,b]$上连续 （2）f(x),g(x)在(a,b),内可导 （3）$g'(x)\ne 0,x\in(a,b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明与拉格朗日证明类似，只要把拉格朗日定理证明过程中 b 换成 g(b)，a 换成 g(a)，x 换成 g(x)即可，读者可自证。

柯西定理也可以用来证明不等式及适合某种条件ξ的存在性，但没有拉格朗日定理和罗尔定理用得多。

泰勒（Tay lor）定理 2.16 设 f(x)在区间I 上存在 n+1 阶导数，对每一个 $x_0\in$ I,任给 $x\in$ I,且$x\ne x_0$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ是介于 x_0及 x 之间

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为拉格朗日余项，当 x_0=0 时，称为麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$称为麦克劳林余项。

佩亚诺（Peano）定理 2.17 若 f(x)在点 x_0处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$$

称 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 为泰勒公式的佩亚诺余项.

相应的麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)(x\to 0).$$

读者要记住 5 个常用函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

带有拉格朗日余项的泰勒公式可用以证明方程根的存在性、适合某种条件 ξ 的存在性及各种不等式。带有佩亚诺余项的泰勒公式仅适用于求函数极限。

若 $f(x)$ 在 x_0 处取到极值，由 $f(x)$ 在 x_0 处或者导数存在或者导数不存在。由费马定理知若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$，从而知 x_0 一定是驻点或导数不存在的点，因此极值点一定包含在 $f(x)$ 的驻点或导数不存在点之中，对于判断极值点的杯疑点是否为极值点，我们有下述的方法

定理 2.18（取到极值的第一充分条件）若存在 $\delta>0$， $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上连续，在 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内可导（不要求 $f(x)$ 在 x_0 处可导），

（i）当 $x\in(x-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时， $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；

（ii）当 $x\in(x-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时， $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；

（iii）当 $f'(x)$ 在 x_0 两侧符号相同，则 $f(x_0)$ 不是极值。

定理 2.19（取到极值的第二充分条件）（仅适合驻点）

若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)$ 存在且 $f''(x_0)\neq 0,$

当 $f''(x_0)>0$ 时，则 $f(x_0)$ 为极小值，当 $f''(x_0)<0$ 时，则 $f(x_0)$ 为极大值。

注：若 $f''(x_0)=0$ 时，该方法无法判断，但我们有下述的方法

定理 2.20　若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0)\neq 0,(n>1)$, 当 n 为奇数时，$f(x_0)$ 不是极值，当 n 为偶数时，$f(x_0)$ 为极值，且 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值；$f^{(n)}(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值。

注：读者可利用在 $x=x_0$ 处展成带有佩亚诺余项的泰勒公式去证明。

定理 2.21　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续且在内部取到唯一的极值 $f(x_0)$，，那么

(1)若 $f(x_0)$ 为极大值，则 $f(x_0)$ 为最大值，且在的 x_0 左边函数严格递增，在 x_0 的右边函数严格递减；

(2) 若 $f(x_0)$ 为极小值，则 $f(x_0)$ 为最小值，且在的 x_0 左边函数严格递减，在 x_0 的右边函数严格递增.

定理 2.22　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 具有二阶导数，那么

(1)若 $x\in(a,b)$ 时，有 $f''(x)>0$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是上凹的：

(2)若 $x\in(a,b)$ 时，有 $f''(x)<0$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是下凹的.

定理 2.23　设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内连续，若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

定理 2.24 若 $f''(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

求曲线的凹向区间与拐点的步骤：

(1)求出 $f(x)$ 的定义域；(2)求出 $f''(x)=0$ 的点；(3)求出 $f''(x)$ 不存在的点；(4)列表；(5)讨论.

1．曲率公式若曲线

$\Gamma\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，且 $x''(t), y''(t)$ 存在，在参数 t 对应的曲线上点 $M(x,y)$ 处的曲率 $k=\dfrac{|y''x'-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

若曲线 $y=f(x)$，在曲线上点 $M(x,y)$ 处的曲率公式为 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y^{12})^{\frac{3}{2}}}$。

曲率圆

设

$y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 的曲率 $k\neq 0$，在点 M 引法线 MP，在位于曲线凹的一侧的法 线上线段

$\left|AM\right|=\frac{1}{k}, A$为中心,$\frac{1}{k}$为半径作一圆,这个圆就称为曲线在点$M$的曲率圆,这个圆具有下列性质：

（1）它通过点 M，在点 M 与曲线相切（即两曲线有公共切线）；

（2）在点 M 与曲线有相同的凹向；

（3）圆的曲率与曲线在点 M 的曲率相同，曲率圆的中心，称为曲率中心，半径称为曲率半径.

一、证明方程根的存在性

把要证明的方程转化为 **f(x)=0** 的形式。对方程 **f(x)=0** 用下述方法：

1．根的存在定理 若函数 **f(x)**在闭区间**[a,b]**上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0,$则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0.$

2．若函数 **f(x)**的原函数$F(x)$在**[a,b]**上满足罗尔定理的条件，则 **f(x)**在（**a,b**）内至少有一个零值点**.**

3．若函数 **f(x)**的原函数 **F(x)**在某点 x_0 处取极值，在 x_0 处导数也存在，由费马定理知 $F'(x_0)=0$，即 $f(x_0)=0$。

4．实常系数的一元 **n** 次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0)$，当 **n** 为奇数时，至少有一个实根。

证 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=x^n(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n})$$

由$a_0\neq 0,$不妨设 $a_0>0$。由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$取$M=1,\exists N_0>0,$当 $x>N_0$时，都有 **f(x)>1>0**。

取 $b>N_0$，有 **f(b)>0**，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$取$M=1,\exists N_1>0$，当 $x<-N_1$时，都有 **f(x)<-1<0**。

取 $a<-N_1<b$, **f(a)<0**。由 **f(x)**在**[a,b]**连续，**f(`a)f(b)<0**，由根的存在定理知至少存在一点$\xi\in(a,b),$使$f(\xi)=0.$

5．实系数的一元 **n** 次方程在复数范围内有 **n** 个复数根，至多有 **n** 个不同的实数根。

6．若 **f(x)**在区间 **X** 上连续且严格单调，则 **f(x)**在 **X** 内至多有一个零值点。若函数在两端点的函数（或极限）值同号，则 **f(x)**无零值点，若函数在两端点的函数（或极限）值异号，则 **f(x)**有一个零值点。

7．求具体连续函数 **f(x)**在其定义域内零值点的个数：首先求出 **f(x)**的严格单调区间的个数，若有 **m** 个严格单调区间，则至多有 **m** 个不同的零值点。至于具体有几个，按照 **6** 研究每个严格单调区间是否有一个零值点。

8．用泰勒公式证明方程根的存在性**.**

9．在证明方程根的存在性的过程中，我们经常要用拉格朗日定理，积分中值定理，有时也用到柯西中值定理来证明满足方程根的存在性所需的条件，然后利用上述的方法来证明方程根的存在性。

二、证明适合某种条件下ξ的存在性

常用的方法有罗尔定理、拉格朗定理，泰勒公式，

三、证明不等式

证明不等式的方法：

1．拉格朗日定理适用于已知函数导数的条件，证明涉及函数（值）的不等式

2．泰勒公式适用于已知函数的高阶导数的条件，证明涉及函数（值）或低阶导函数（值）的不等式**.**

3．单调性定理**.**

（**i**）对于证明数的大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间两端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明**.**

(ii) 对于证明函数大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间内上任意一点函数值与区间端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明**.**

4．利用函数最大值，最小值证明不等式**.**

把待证的不等式转化为区间上任意一点函数值与区间上某点x_0处的函数值大小的比较，然后证明$f(x_0)$为最大值或最小值，即可证不等式成立。

5．利用函数取到唯一的极值证明不等式**.**

把待证的不等式转化为区间上任意一点函值与区间内某点x_0处的函数值大小的比较，然后证明$f(x_0)$为唯一的极值且为极大值或极小值，即$f(x_0)$为最大值或最小值，即可证不等式成立。

6．用柯西定理证明不等式**.**

7．利用曲线的凹向性证明不等式**.**

（**1**）若$x \in (a,b), f''(x) > 0$（曲线上凹），知曲线在（***a,b***）内上凹，有不等式$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b), \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$均为正数，且$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$，则$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$特别地$0 < \lambda < 1,$有$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$。

（**2**）若$x \in (a,b), f''(x) < 0$（曲线下凹），知曲线在（***a,b***）内下凹，有不等式$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b), \lambda_{1,} \lambda_{2,} \ldots, \lambda_n$均为正数且$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1,$则$f(\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$**.**特别地$0 < \lambda < 1,$有$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

等号仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 时成立。

证（1）令 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b=b\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=b,$ 同理可证 $x_0>a,$ 知 $x_0\in(a,b),$ 对

每一个 $x_i\in(a,b), i=1,2,\ldots,n,$ 由泰勒公式

$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i-x_0)^2\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0),\ \xi_i$ 介于

$x_{0,}x_i$ 之间。从而有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_0)(x_i-x_0)$

$$=f(x_0)+f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-x_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x_0)=f(x_0)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$$

即 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\ldots+\lambda_nf(x_n)$.由证明过程可知等号仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 时成立。

同理可证（2）成立

8．利用不等式：$\forall x_i>0(i=1,2,\ldots,n),$ 有

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

（调和平均数≤几何平均数≤算术平均数）等号仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 时成立。

证若令 $f(x)=-\ln x(x>0),$ 于是 $f''(x)=\frac{1}{x_2}>0$.

由 7 知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\ln x_i)\geq-\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)\Leftrightarrow\frac{1}{n}\ln(x_1x_2\ldots x_n)\leq\ln(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n})$

即 $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

在上面不等式中，用 $\frac{1}{x_i}$ 替代 x_i，有不等式 $\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}\leq\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$，

即 $$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

从而有 $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n}$.

在证明不等式的过程中，我们也经常用绝对值的不等式 $\left|x_1+x_2+\cdots x_n\right| \le \left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\ldots+\left|x_n\right|$. 可以说知道有关不等式的结果越多对我们证明不等式越有利。

第四章　不定积分

大纲要求

会　求有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分。

理解 原函数概念，不定积分和定积分的概念。

掌握 不定积分的基本公式，不定积分和定积分的性质及定积分中值定理，换元积分法与分部积分法。

内容精要

（一） 基本概念

定义 3.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个可微函数 $F(x)$，使得对一切 $x \in I$,都有$F'(x) = f(x)$,则称$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数 。

定义3.2 若 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数,则 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作$\int f(x)dx$.

（二）重要定理与公式

定理 3.1　若 $F(x)$是$f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则 $f(x)$ 在区间 I 的全体原函数为 $\int f(x)dx = F(x) + C$， $C \in R, C$ 是常数.

注：根据定义可知求出的 $F(x)$ 的定义域至少要与 $f(x)$ 的定义域一样。

基本积分表（略）

注：从不定积分表中可看出，求出不定积分形式可以不一样，如何验证所求不定积分的正确性，只要把所求的不定积分求导看是否为被积函数即可.

不定积分性质

性质 1　$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$或$d\int f(x)dx = f(x)dx$.

性质 2　$\int df(x) = f(x) + C$ 或 $\int f'(x)dx = f(x) + c.$

性质 3　若 $f(x), g(x)$ 的原函数都存在，则

（i） $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ；

$(ii)\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx, \alpha$为常数$, \alpha \neq 0$.

注 1：从性质 2 可知不定积分是导数的逆运算，正是利用这一性质，寻找哪个函数的导数为 $f(x)$，则这个函数就是 $f(x)$ 的一个原函数

注 2:　性质 2 告诉我们求不定积分的一个方法,即如何把$\int f(x)dx$表示成$\int dF(x)$形

式，实际上就是 $f(x)dx = dF(x)$, 这正是微分的逆过程，从而可以利用我们所学的微分基本公式，微分的四则运算，尤其是一阶微分形式不变性，把 $f(x)dx$ 写成 $dF(x)$ 形式, 从而求出了 $f(x)$ 的不定积分。

1.凑微分（第一换元法）

$$f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(\varphi(x))d\varphi(x) \underline{\underline{\text{设}\varphi(x)=u}} f(u)du \underset{\text{利用一阶微分变性}}{\overset{\text{若}f(u)\text{的原函数}F(u)\text{存在}}{=\!=\!=\!=}}$$

$dF(u) = dF(\varphi(x))$, 知 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数，由分析过程可知

定理（凑微分）设 $F'(u) = f(u), u = \varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) \quad \underline{\underline{\text{令}\varphi(x)=u}}$$

$$\int f(u)du = F(u)+c = F(\varphi(x))+C$$

注：给一个不定积分 $\int g(x)dx$，要想运用凑微分，关键是能否把被积表达式 $g(x)dx$ 表示成 $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ 的形式，并且要求 f(u)的原函数能求出来，在具体运用此定理时，一般不引入中间变量 u (如果 $f(u)$ 的原函数直接求不出来就需要引入中间变量)，而直接写出结果，即

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x)) = F(\varphi(x))+c\ .$$

为了熟练运用凑微分，记住下列微分关系是必要的（其实就是求原函数）.

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)(a \neq 0)$
2. $xdx = -\frac{1}{2}d(a^2 - x^2)$
3. $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$
4. $\sin xdx = -d\cos x$
5. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$
6. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2 \pm a^2)$
7. $\frac{1}{x}dx = d\ln|x|$
8. $e^x dx = de^x$
9. $\cos xdx = d\sin x$
10. $\frac{1}{1+x^2}dx = d\arctan x$

2．变量代换法

由一阶微形式的不变性知

$$f(x)dx \underline{\underline{\text{若}x=\varphi(t)\text{可微}}} f(\varphi(t))d\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \underline{\underline{\text{若}f(\varphi(t))\varphi'(t)\text{有原函数 }F(t)}}$$

$$dF(t) \underline{\underline{\text{若}x=\varphi(t)\text{严格单调}}} dF(\varphi^{-1}(x))\text{，}$$

t=$\varphi^{-1}(x)$

知$F(\varphi^{-1}(x))$是$f(x)$的一个原函数,由此得

定理（变量代换法）若 $x=\varphi(t)$ 严格单调，可微，且 $F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$，则

$$\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+c$$

用变量代换求不定积分的具体步骤是

$$\int f(x)dx \underline{\underline{令x=\varphi(t)}} 可导 \int f(\varphi(t))d\varphi(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\underline{\underline{f(\varphi(t))\varphi'(t)有原函数F(t)}}\ F(t)+C\underline{\underline{t=\varphi^{-1}(x)}}F(\varphi^{-1}(x))+c$$

变量代换适合被积函数中含有根式且不能直接求出,也不能用线性运算法则或凑微分求出时，则需用变量代换，目的是为了去掉根号，一般来说，当被积函数中含有

$\sqrt{a^2-x^2}$,令$x=a\sin t,t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{a^2+x^2}$,令$x=a\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\sqrt{x^2-a^2}$,令$x=a\sec t,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)U(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,解得$x=\varphi(t)$,令$x=\varphi(t)$

变量代换不仅适合于去根号，只要通过变量代换能求出原函数都可以用。

3．分部积分

定理（分部积分法）若

$u=u(x),v=v(x)$均可导,且$\int u'(x)v(x)dx$存在,则$\int u(x)v'(x)dx$也存在,且

$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$，常写成$\int udv=uv-\int vdu.$

在具体运用这个公式时，关键是把被积函数表示成$u(x)v'(x)$的形式，而且目的是要把 $u(x)$ 转化，从而转化为求不定积分$\int v(x)u'(x)dx.$

分部积分适合下列情形，当 $p_n(x)$是x的 n 次多项式时，

1．$\int \underset{u}{p_n(x)}\underset{v'}{e^{ax}}dx=\int p_n(x)d\frac{1}{a}e^{ax}(a\neq 0)$.

2．$\int p_n(x)\cos(ax+b)dx=\int p_n(x)d\frac{1}{a}\sin(ax+b)(a\neq 0)$.

3 ．$\int p_n(x)\sin(ax+b)dx=\int p_n(x)d[-\frac{1}{a}\cos(ax+b)](a\neq 0)$.

上面需要用 n 次分部积分.

在下列情形中，$p(x)$是x的多项式或其它x的表达式，当不能凑微分求出时，常常要用分部积分

4. $\int p(x)f(\ln x)dx$, 令$f(\ln x)=u, v'=p(x)$.

5. $\int p(x)f(\arcsin x)dx$, 令$f(\arcsin x)=u, v'=p(x)$.

6. $\int p(x)f(\arctan x)dx$, 令$f(\arctan x)=u, v'=p(x)$.

在求不定积分时，需要基本不定积分表（还有一些重要的不定积结果），线性运算法则，凑微分，变量代换，分部积分综合运用。

重要的不定积分有

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx(a\neq 0)=\frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d(\frac{x}{a})=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c \ .$$

$$\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|+c.$$

$$\int \cot xdx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{1}{\sin x}d\sin x=\ln|\sin x|+c.$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx(a\neq 0)=\frac{1}{2a}\int (\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x})dx.$$

$$=\frac{1}{2a}[-\int \frac{1}{a-x}d(a-x)+\int \frac{1}{a+x}d(a+x)]=\frac{1}{2a}[-\ln|a-x|+\ln|a+x|]+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

.

这些结果都要记住.

例 3.1.1　求$\int \csc xdx$.

解法一　$\int \csc xdx=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int \frac{1}{1-\cos^2 x}d\cos x$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}\right|+c=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c.$$

解法二　$\int \csc xdx=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c.$$

同理可求$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$，这两个结果要记住.

注：千万不要忘了加 C，加了 C 是一族原函数，不加 C 只是一个原函数，相差甚远。

例 3.1.2　求$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$　　（$a>0$）.

解　令$x = a\tan t$，

原式　$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t + a^2}} da\tan t = \int \frac{a\sec^2 t}{a|\sec t|} dt$

$$\underline{\underline{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}} \int \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + c.$$

由$\tan t = \frac{x}{a}$，作出直角三角形，可知$\sec t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，于是

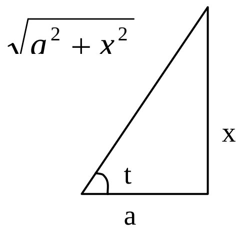


图 3-1

原式$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c - \ln|a|$

$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c_1 (c_1 = c - \ln|a|)$.

同理可得$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$。

这两个结果要记住.

注 1 在利用三角变换时，代换回原变量时，尽管可以三角公式，但有时很麻烦，一般根据三角变换，画出直角三角形，求出三角形的各边长，然后根据三角函数的定义，非常方便地求出所需角 t 的三角函数。

注 2 在变量代换时，会遇到去绝对值，若绝对值中的式子，有时正，有时负，被积函数是初等函数，这时可不妨设绝对值中的式子大于零，不影响求不定积分，一般说，结果是一样的。

设 $P_n(x), Q_m(x)$ 分别是 n 次和 m 次多项式，称 $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ 为有理函数，当 m<n 时，称为有理真分式，当 m≥n 时，称为有理假分式，利用多项式除法，有理假分式可以化成多项式与有理真分式之和。由于多项式的不定积分可用幂函数的不定积分与线性运算法则求出，而有理真分式通过待定系数法或赋值法可化为第一类最简分式与第二类最简分式之和.

第一类最简分式的不定积分$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + c, n=1, \\ \frac{A}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + c, n>1. \end{cases}$

第二类最简分式的不定积分$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$，其中$p^2-4q<0$.

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Mx+N}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}d(x+\frac{p}{2}),\text{由于}\frac{4q-p^2}{4}>0,\text{设}\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=a,\text{令}$$

$x+\dfrac{p}{2}=t,$于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{M\ (t-\frac{p}{2})+N}{(t^2+a^2)^n}dt=M\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt+(N-\frac{MP}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

$$\text{而}\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}d(t^2+a^2)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+c,n=1,\\ \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+c,n>1\end{cases}$$

对于积分$\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$可利用后面的例题的结果来计算，然后把$t=x+\dfrac{P}{2}$代入,便可求出我们还有下面的结果。

定理　一切有理函数的原函数总可以用多项式、有理函数、对数函数及反正切函数表达出来，即有理函数的原函数一定是初等函数。

三角函数有理式的不定积分

由 $u_1(x),u_2(x),...,u_k(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于

$u_1(x),u_2(x),...,u_k(x)$ 的有理式，记作 R$(u_1(x),u_2(x),...,u_k(x))$.

由于三角函数有理式 R（sinx,cosx,tanx,cotx,secx,cscx）=R(sinx,cosx)，所以，我们只要讨论$\int R(\sin x,\cos x)dx$. 对于这类积分，我们可以利用变换 t=tan$\dfrac{x}{2}$，x$\in(-\pi,\pi)$, 把它们转化为 t 的有理函数的积分，从而求得函数。这是因为

$$\text{sinx}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\ \ \text{cosx}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};x=2\arctan t;dx=\frac{2dt}{1=t^2},$$

$$\text{故}\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt\ .$$

显然，上式右端是关于变量 t 的有理函数的积分。求出 t 的原函数后，只需将 t=tan$\dfrac{x}{2}$代

从理论上讲，对于$\int R(\sin x,\cos x)dx,$ 利用上述变量代换总可以算出它的积分，然而有时候会导致很复杂的计算。因此，对某些特殊类型的积分，可选择一些更简单的变量代换，使得积分比较容易计算。

1. $\int \sin^m x\cos^n xdx,$ 其中 m,n 中至少有一个奇数（另外一个数可以是任何一个实数）。对这类积分，把奇次幂的三角函数，分离出一次幂，用凑微分求出原函数。

2. $\int \sin^m x\cos^n xdx,$ 其中 m,n 均是偶数或零

计算这类不定积分主要利用下列三角恒等式：

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\qquad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

降幂，化成 1 的情况来计算。

3. $\int \sin mx\cos nxdx,\int \sin mx\sin nxdx,\int \cos mx\cos nxdx,$ 其中 m,n 是常数，且 m$\neq \pm n.$

计算这类积分，可利用下述积化和差公式

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right];$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right];$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$$

4. $\int R(\sin^2 x,\sin x\cos x,\cos^2 x)dx.$ 令 tanx=t，有 x=arctant.

$$dx=\frac{1}{1+t^2}dt\qquad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\qquad \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},$$ 于是

$$\int R(\sin^2 x,\sin x\cos x,\cos^2 x)dx=\int R(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2})\frac{1}{1+t^2}dt$$

类型 1.1 形如$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}}\right)dx$的积分

解题策略 令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,$有$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$，

经整理得 $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=\varphi(t),$于是$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=$

$\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt,$这样，就化成了以$t$为变量的有理函数积分。

类型 1.2 形如$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$的积分，

解题策略 把$\sqrt{ax^2+bx+c}$化成如下三种形式之一：

$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-\varphi^2(x)},$ 其中φ（$x)=px+q(p\neq 0)$ 的一次多项式，k 为常数，能用凑微分就用凑微分，否则再用三角变换即可化三角函数有理式的不定积分

从以上不定积分的计算中可以看出，求不定积分要比 求导数更复杂，更灵活。计算不定积分的基础是利用基本积分、简单函数的不定积分、凑数分法、变量代换法及分部积分法。这几种都是将所求的不定积分化成基本积分表中被积函数的形式，从而求得不定积分，我们将一些常用的不定积分公式已在前面例子中给出，并要求读者记住，这些公式也是建立在基本积分方法基础上的。在基本积分方法熟练掌握的基础上，要多做一些练习，才能熟能生巧，最后还要指出，有些不定积分.

第三章　定积分及其应用

大纲要求

了解反常积分的概念。

会　，求积分上限的函数的导数，计算反常积分。

理解定积分的概念，积分上限的函数。

掌握定积分的性质及定积分中值定理，换元积分法与分部积分法，牛顿一莱布尼茨公式，用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力）及函数的平均值等.

内容精要

（一）　基本概念

定积分的概念是由求曲边梯形面积，变力作功，已知变速直线运动的速度求路程，密度不均质线段的质量所产生。

定义 3.3　设函数 f(x)在闭区间$\left[a,b\right]$上有定义，在闭区间[a,b]内任意插入 n-1 个分点将$\left[a,b\right]$分成

n 个小区间$[x_{x-i},x_i]$，记$\Delta x_i=x_i-x_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\forall\xi\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$（称为积分元），把这些乘积相加得到和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ （称为积分和式）设

$\lambda=\max\left\{\Delta x_i:1\le i\le n\right\}$，若$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 极限存在唯一且该极限值与区是[a,b]的分法及分点ξ_i的取法无关，则称这个唯一的极限值为函数 f(x)在$\left[a,b\right]$上的定积分，记作

$\int_a^b f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

否则称 f(x)在$\left[a,b\right]$上不可积.

注 1 由牛顿莱布尼兹公式知，计算定积分与原函数有关，故这里借助了不定积分的符号。

注 2 若$\int_a^b f(x)dx$存在，区间$\left[a,b\right]$进行特殊分割，分点ξ_i进行特殊的取法得到的和式极限存在且与定积分的值相等，但反之不成立，这种思想在考题中经常出现，请读者要真正理解。

注 3 定积分是否存在或者值是多少只与被积函数式和积分区间有关与积分变量用什么字母表示无关，即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du.$

定积分的几何意义： 若 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=a, x=b$ 所围成的曲边梯形的面积.

同样，变力所作的功 $w=\int_a^b f(x)dx$ （其中 f(x) 是变力）变速直线运动的路程 $S=\int_a^b v(t)dt$ （$v(t)$ 是瞬时速度），密度不均质直线段 $[a,b]$ 的质量 $M=\int_a^b \mu(x)dx$ （其中 $\mu(x)$ 是线密度）。

规定 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx,\qquad \int_a^a f(x)dx=0.$

四、广义积分

定义 3.4 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，称记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx \underline{\underline{记成}} \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ （1）

为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分（或第一类广义积分）若（1）式右端极限存在，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，该极限值称为广义积分的值，否则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续必有原函数，设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$。于是

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}[F(t)-F(a)]\\ &=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a)=\lim_{t\to+\infty}F(x)-F(a)\underline{\underline{记成}}F(x)\Big|_a^{+\infty},\end{aligned}$$

从而广义积分可以按照正常定积分计算方式来计算，即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)-F(a)$

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$ （存在）=*A*，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=A-F(a)$.若 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$ 不存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

同理可得 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^b=F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

若 $\lim\limits_{t\to-\infty}F(x)$ 存在，则广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 收敛，否则发散。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$， $\lim\limits_{t\to-\infty}F(x)$ 都存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则发散。

定义 3.5 设 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 不存在（称 *a* 点为瑕点），$\forall\varepsilon>0$ 且

$\varepsilon < b-a$，称记号$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{记成}}{=\!=\!=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

与上面研究方式相同，可得$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim\limits_{\varepsilon\to a^+} F(x)$

若$\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$存在，则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，否则发散。

同理若$f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$不存在（称$b$点为瑕点），有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

若$f(x)$在$[a,c)\cup(c,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x)$不存在（称$c$点为瑕点），定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

当且仅当$\int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$都收敛时，$\int_a^b f(x)dx$收敛，且$\int_a^b f(x)dx$值等于$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$的值之和。

注 若$f(x)$在$(a,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$（常数），则$\int_a^b f(x)dx$可看成正常积分，

事实上，定义$F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x\in(a,b]. \end{cases}$知$F(x)$在$[a,b]$上连续，即$\int_a^b F(x)dx$存在，

而$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a-\varepsilon}^b F(x)dx$，由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，知变下限函数$G(\varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^b F(x)dx$在$[0,b-a]$上连续，有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} G(\varepsilon) = G(0) = \int_a^b F(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F(x)dx.$故$\int_a^b f(x)dx$可看成正常积分。

若广义积分收敛，也有线性运算法则，不等式性质，也有凑微分，变量替换，分部积分公式，换句话说可以像正常的定积分一样运算。

第一p广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ （a>0，常数）.

当$p \neq 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$

当$p = 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty$，知$p > 1$时收敛，$p \le 1$时发散

第二p广义积分$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ $(b > a)$.

令$\frac{1}{x-a} = t$， $dx = -\frac{1}{t^2}dt$，有$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} t^p\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^{2-p}}dt.$

由第一 p 广义积分知，当 $2-p>1$，即 $p<1$ 时收敛，当 $2-p\le 1$，即 $p\ge 1$ 时发散。

（二）重要定理与公式

定理 3.2 若函数 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上有界，反之不成立。

例 $D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上有界但不可积 .

事实上，因为不论把 [0，1] 分割得多么细，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中，总能找到有理数

$\eta_i^{'}$，无理数 $\eta_i^{''}$，知

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}D(\eta_i^{'})\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}1=1,\quad \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}D(\eta_i^{''})\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}0=0,$ 知

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在。

定理 3.3 若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定理 3.4 若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点且有界，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定理 3.5 若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上单调，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定积分的性质

性质 1 $\int_a^b 1dx=\int_a^b dx=b-a.$

性质 2 （线性运算法则）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，对任何常数 α,β 则

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\ .$$

该性质用于定积分的计算与定积分的证明.

性质 3 （区间的可加性），若 f(x) 在以 a,b,c 为端点构成的最大区间上可积，则不论 a,b,c 顺序如何，有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

该性质用于计算分段函数的定积分与定积分的证明.

性质 4 若 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge 0,$ 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

性质 5 若 f(x) ,g(x) 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge g(x),$ 则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx.$

性质 6 若 f(x) 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x)\ge 0,$ 且 f(x) 0 则 $\int_a^b f(x)dx>0.$

性质 7 若 f(x) ,g(x) 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\ge g(x),$ 但 $f(x)\ne g(x)$,则

$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

性质 8　若 f(x)在$[a,b]$上可积，则$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

性质 9　若 f(x)在$[a,b]$上可积，在区间$[a,b]$上，m≤f(x)≤M，m，M 是常数，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质 4、5、6、7、8、9 主要用于定积分不等式的证明及不通过定积分的计算，估计定积分值的范围.

性质 10　(积分中值定理)若 f(x)在闭区间$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

而$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$称为 f(x)在区间$[a,b]$上的平均值，即闭区间[a,b]上连续函数 f(x)的平均值是$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

注：这里的$\xi \in [a,b]$与$\xi \in (a,b)$是不同的。

性质 11　(推广的积分中值定理)　设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，且 g(x)在$[a,b]$上不变号，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

性质 12（柯西----许瓦尔兹（Cauchy—schwarz）不等式）

设函数 f(x)，g(x)在$[a,b]$上连续，则

(1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$

(2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \{[\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\}^2.$

性质 13　变上限积分求导定理　设 f(x)连续，$u(x), v(x)$可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

1．定积分计算的方法

(1) 牛顿一莱布尼兹公式　若 f(x) 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx \xlongequal{F'(x)=f(x)} F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

(2) 凑微分　$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

$=\int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x)\xlongequal{F'(u)=f(u)}F(\varphi(x))\Big|_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a)).$

（3）变量替换 $\int_a^b f(x)dx \xlongequal[a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)]{\text{令}x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\xlongequal{F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)}F(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha).$$

（4）分部积分　设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上导数连续，则 $\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

具体的用法是$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)v'(x)dx=\int_a^b u(x)dv(x)$

$$=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

如果能够计算出$\int_a^b v(x)u'(x)dx,$就可以计算出$\int_a^b f(x)dx.$

定积分的凑微分、变量替换、分部积分与不定积分中三种方法适合的被积函数相同，即不定积分用三种的哪一种方法，定积分也用三种方法的哪一种。

（5）设 f(x)在$[-a,a]$上连续，则$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{若}f(x)\text{为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{若}f(x)\text{为偶函数}.\end{cases}$

事实上，　$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

而$\int_{-a}^0 f(x)\xlongequal{\text{令}x=-t}-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx=\begin{cases}-\int_0^a f(x)dx, & \text{若}f(x)\text{为奇数},\\ \int_0^a f(x)dx, & \text{若}f(x)\text{为偶函数}.\end{cases}$

故得证

推论$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$

证　由于 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},$

且$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，于是

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a[\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}]dx$$

$$=\int_0^a[\frac{f(x)+f(-x)}{2}]dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

（6）设 f(x)为周期函数且连续，周期为 T，则$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

事实上$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$

由　于　$\int_T^{a+T} f(x)dx\xlongequal{\text{设}x=t+T}\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=-\int_a^0 f(x)dx,$　于　是

$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$

（7）设 f(x)在[0,1]上连续，则$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx.$

事实上$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx \overset{令x=\pi-t}{=\!=\!=} -\int_{\pi}^{0} (\pi-t) f[\sin(\pi-t)]dt$

$$= \int_{0}^{\pi} (\pi-x) f(\sin x)dx = \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx - \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx.$$

移项两边同除以 2 得$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$.

（8）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, 当n为偶数, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, 当n为奇数. \end{cases}$

事实上$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx \overset{令x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}},\cos^n tdt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx.$

记$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} xd\sin x$

$$= \cos^{n-1} x\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(n-1)\cos^{n-2} x\sin xdx(n\ge 2)$$

$$= (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

于是$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}\cdots$

由于递推公式每次降 2 次，要讨论 n 为奇偶数的情形，由

$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 1, I_0 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}},dx = \frac{\pi}{2}$, 故$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, 若n为偶数, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, 若n为奇数. \end{cases}$

微元法

根据所给条件，画图，适当建立坐标系，在图中把所需曲线的方程表示出来，确定要求量 Q 所分布的区间$[a,b]$且区间$[a,b]$上的总量 Q 具有等于各小区间上部分量之和的特点.

（1）取近似求微元.选取区间$[x, x+\Delta x](\Delta x>0)$。写出部分量$\Delta Q$ 的近似值 $f(x)\Delta x$, 即

$$\Delta Q \approx f(x)\Delta x.$$

要求 $f(x)\Delta x$ 是ΔQ 的线性主部dQ.即计算的过程中，可以略Δx 的高阶无穷小。

这一步是关键、本质的一步，所以称为微元分析法或简称微元法.

（2）得微分.　$dQ = f(x)dx$　　（3）计算积分.　$Q = \int_a^b f(x)dx.$

注：第一步一定要把 ΔQ 表示成 x 的函数与 Δx 的乘积形式.

由 $\Delta x = dx$，于是又可写成下面的步骤：

（1）选取 $[x, x+dx](dx > 0)$, 求 ΔQ 的线性主部 dQ， $dQ = f(x)dx$,

（2） $Q = \int_a^b f(x)dx.$

第五章　多元函数的微分学

大纲要求

了解 二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质，全微分存在的必要条件和充分条件，全微分形式的不变性，隐函数存在定理，空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念（仅适合数学一）

，二元函数的二阶泰勒公式，二元函数极值存在的充分条件。

会 求全微分，求空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的方程（仅适合数学一），求二元函数的极值，用拉格朗日乘数法求条件极值，求简单多元函数的最大值和最小值，解决一些简单的应用问题．

理解 多元函数的概念，二元函数的几何意义，多元函数偏导数和全微分的概念，方向导数与梯度的概念（仅适合

数学一），多元函数极值和条件极值的概念，

掌握 多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法，多元隐函数的偏导数，多元函数极值存在的必要条件，

一、内容精要

（一） 基本概念

定义 5.1　设 $f(x,y)$ 在 $\bigcup(P_0,\delta)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，

则该极限值称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $f'_x(x_0,y_0)$ 或 $z'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.同理

可给出 $f'_y(x_0,y_0)$ 的定义。

多元函数的偏导数，本质就是求导数，例如 $u=u(x,y,z)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 时，视自变量 y,z 为常数，本质上看成 u 是 x 的函数，这时一元函数的求导公式，四则运算，复合函数的求导都可以使用，但形式上要比求一元函数的导数复杂。

定义 5.2　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ $\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0\right)$，其中 A，B 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，而仅与 x，y 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，线性主部 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y.$

设 $z=z(u,v)$，不论 u，v 是自变量，还是中间变量，若 $z=z(u,v)$ 可微，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

换句话说，若 $z=z(u,v)$ 可微，且 $dz=g(u,v)du+h(u,v)dv$，则

$\frac{\partial z}{\partial u}=g(u,v),\frac{\partial z}{\partial v}=h(u,v).$

上式在求复杂多元函数的偏导数与全微时显得非常重要。

当然多元函数的偏导数与多元函数的全微分也有四则运算和一元情形完全类似，在这里就不再叙述了。

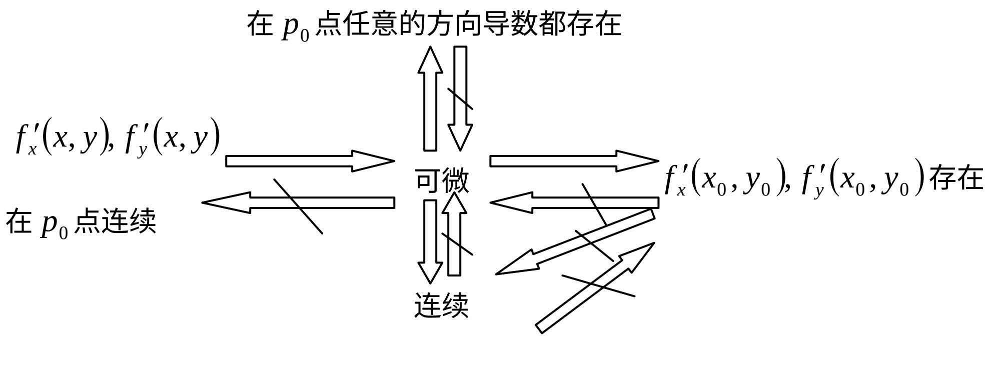
定义 5.3　设函数$u=u(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某区域$\bigcup(P_0)\subset R^3$内有定义，l为从点P_0出发的射线，$P(x,y,z)$为l上且含于$\bigcup(P_0)$内任一点，ρ表示P_0与P两点间的距离，若极限$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta_l u}{\rho}$存在，则称此极限为函数$u$在点$P_0$沿方向的$l$方向导数，记作$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}$，由定义知方向导数是一个数量。

容易证明，若$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$存在，则$u$在点$\rho_0$沿$x$轴正方向的方向导数是$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$，$u$在点$P_0$沿$x$轴负各时的方向导数为$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}$.

定义 5.4　设$u=u(x,y,z)$偏导数均存在，称$\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$为函数$u(x,y,z)$在点$P$处的梯度，记作$gradu$，即$gradu=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. 由定义知$gradu$是一个矢量。

定义 5.5　设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某区域$\bigcup(P_0)$内有定义，$\exists\delta>0$，当$P\in\bigcup(P_0,\delta)$时，都有$f(P)\le f(P_0)$（或$f(P)\ge f(P_0)$），则称$f(P_0)$为极大（或极小）值。点P_0称为f的极大（或极小）值点，极大值、极小值统称为极值。极大值点、极小值点统称为极值点。

极值点一定包含在多元函数的驻点或偏导数不存在点之中（若$f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$，称$(x_0,y_0)$为驻点或稳定点)。多元函数在一点连续，偏导数存在，可微，方向导数存在，偏导函数在该点连续，这些概念有下面的关系，我们以$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处为例。



注：这里“$\Longrightarrow$”表求推出，“$\not\Longrightarrow$”表示推不出，能推出的，都是定理，推不出的，我们在下面都举了反例。

（二）重要定理与公式

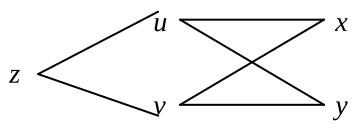
定理 5.1 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y), \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$和二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$都存在，则三者相等。

推论5.1.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y), \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在且不相等，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在。

定理 5.2（复合多元函数的求偏导定理），若 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处可微，$u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$在$(x,y)$处的偏导数均存在，则复合函数$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在$(x,y)$处的偏导数均存在且

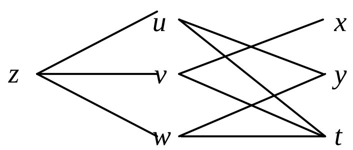
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'(u,v)\cdot\varphi_x'(x,y)+f_v'(u,v)\cdot\psi_x'(x,y);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u'(u,v)\cdot\varphi_y'(x,y)+f_v'(u,v)\cdot\psi_y'(x,y).$$

可用下面结构图表示：



即$\dfrac{\partial u}{\partial x}$就是 u 分别对那些是 x 函数的中间变量偏导再乘以这些中间变量对 x 偏导，然后再相加

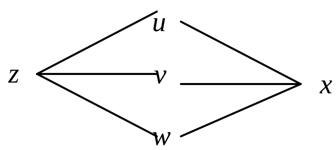
例如



知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y};\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}.$$

例如



$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

上式称为全导数。求复合多元函数偏导的思想一定要真正搞懂，否则在求复杂形式下的

多元复合函数的偏导就容易出错。

定理 5.3　若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ 都在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则

$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$

定理 5.4　若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，反之不成立。

定理 5.5（可微的充分条件）若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，反之不成立。

定理 5.6　（可微的必要条件）若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数均存在，反之不成立。

定理 5.7　若函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 u 在 P_0 处任意方向的方向导数都存在且 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\cos\gamma$,（其中 l 的单位矢量 $l^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.）反之不成立。

1.方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=gradu(P_0)\cdot l^0=|gradu(P_0)||l^0|\cos\theta=|gradu(P_0)|\cos\theta$$

其中 θ 是矢量 $gradu(\rho_0)$ 与的夹角。由此得出下面结论。

（1） u 在点 P_0 处沿方向 l 的方向导数，等于梯度在方向的 l 投影，即 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=gradu(P_0)\cdot l^0.$

（2）当 $\theta=0$，即 l^0 的方向梯度方向 $gradu(P_0)$ 一致时，即函数 $u(x,y,z)$ 在 P_0 处沿梯度方向 $gradu(P_0)$ 的方向导数最大，且

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}\right)=|gradu(P_0)|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\right)^2}$$

这就是，当 u 在点 P_0 可微时，u 在点 P_0 的梯度方向是 u 值增长得最快的方向，当 $\theta=\pi$，即 ι^0 的方向与梯度方向 $gradu(P_0)$ 相反时，即 $u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿方向 $gradu(P_0)$ 时的方

向导数最小，最小值 $\min\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}\right)=-\left|gradu(P_0)\right|$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，即在 P_0 点沿着与梯度 $gradu(P_0)$ 垂直的方向的方向导数为零。

定理 5.8（极值的充分条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某区域存在连续的二阶偏导数。如果 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$，设 $A=f_{xx}''(x_0,y_0), B=f_{xy}''(x_0,y_0), C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，

则 （1）当 $B^2-AC<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 一定为极值，并且当 A（或 C）>0 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 A（或 C）<0 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值。

（2）当 $B^2-AC>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值。

（3）当 $B^2-AC=0$ 时，还不能断点 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值，需进一步研究。

对于偏导数不存在的点，只有根据定义判断是否为极值点。

2．求带有条件限制的最大（小）值问题，统称为条件极值，可用拉格朗日乘数法去解决。

即求 $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ 在约束条件 $\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)=0(k=1,2,...,m)$ 限制下的最大值或最小值方法是

（1）作拉格朗日函数 $L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_\kappa\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)$,

其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ 称为拉格朗日乘数。

（2）若 $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ 是函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的最大（小）值点，则一定存在 m 个常数 $(\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)$，使 $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$ 是函数 L 的稳定点，因此函数 f 的最大（小）值点一定包含在拉格朗日函数 L 的稳定点前几个坐标所构成的点之中，在具体应用时，往往可借助于物理意义或实际经验判断所得点是否为所求的最大（小）值点。

定理 5.9 有界闭区域上的连续函数一定能取到最大值与最小值，且最大值与最小值点一定包含在区域内部的稳定点或内部偏导不存在点或边界函数值最大与最小点之中.

把这些怀疑点求出来，其中函数值的最大值就是区域上的最大值、最小值就是区域上的最小值，而边界上的最大与最小值点可用拉格朗日乘数法去求。

泰勒定理 5.10 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $\bigcup(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导，则对 $\bigcup(P_0)$ 内任一点 x_0+h, y_0+k，存在 $\theta\in(0,1)$，使

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{z!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k).$$

上式称为二元函数 f 在点 p_0 处的 n 阶泰勒公式。

注：$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i h^{n-i}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，

推论 5.10.1 设 $f(x,y)$ 在区域 G 上具有连续的一阶偏导数，

(1) 若 $f_x'(x,y)\equiv 0,(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 上仅是 y 的函数；

(2) 若 $f_y'(x,y)\equiv 0,(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 上仅是 x 的函数；

(3) 若 $f_x'(x,y)\equiv 0,\ f_y'(x,y)\equiv 0(x,y)\in G,$ 则 $f(x,y)$ 在 G 是常值函数。

1. 设 $F(x,y,z)$ 在点 P_0 处具有连续的一阶偏导数且 $F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)$ 不同时为零，则曲面 $\sum$：$F(x,y,z)=0$ 在曲面上 ρ_0 点的切平面方程为

$F_x'(\rho_0)(x-x_0)+F_y'(\rho_0)(y-y_0)+F_z'(\rho_0)(z-z_0)=0.$

其中 $\{F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)\}$ 或 $-\{F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0)\}$ 是曲面 $\sum$ 在点 P_0 处的法矢量。

曲面 $\sum$ 在点 P_0 处的法线方程为 $\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}.$

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处具有连续的一阶偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 即 $f(x,y)-z=0$ 在曲面上点 (x_0,y_0,z_0) $(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

在 (x_0,y_0,z_0) 处的法线方程为 $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

2. 设 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不同时为零。则曲线 $\Gamma:x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 在 $t=t_0$ 对应曲线上点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $(x_0 = x(t_0), y = y(t_0), z = z(t_0))$处的切线方程为$\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$.

其中$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$或$-\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$为曲线$\Gamma$在$P_0$点切线的方向向量，而曲线$\Gamma$在点$P_0$处的法平面方程为$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

设$F(x, y, z), G(x, y, z)$在$P_0(x_0, y_0, z_0)$处具有连续的一阶偏导，且

$\{F'_x(P_0), F'_y(P_0), F'_z(P_0)\} \prod \; G'_x(P_0), G'_y(P_0), G'_z(P_0)\}$，则曲线$\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

在曲线上点$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程为

$$\begin{cases} F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0, \\ G'_x(P_0)(x - x_0) + G'_y(P_0)(y - y_0) + G'_z(P_0)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

事实上,曲线Γ的切线既在曲面$F(x, y, z) = 0$在ρ_0的切平面上又在曲面$G(x, y, z) = 0$在P_0的切平面上，故该切线为两切平面的交线，故切线方程为两切平面方程的联立。

由切线的方向向量为$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0) \\ G'_x(P_0) & G'_y(P_0) & G'_z(P_0) \end{vmatrix}$,而曲线$\Gamma$在$P_0$点的法平面的法矢量为$\vec{v}$，用点法式可写出曲线$\Gamma$在$P_0$点的法平面方程。

第九章　多元函数积分学(二重积分)

考研大纲要求

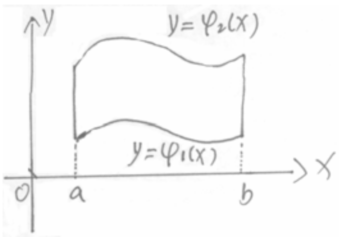
了解 二重积分的性质，了二重积分的中值定理
理解 二重积分的概念.
掌握 二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）

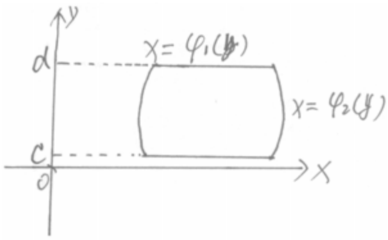
内容精要

（一）　重要定理与公式.

1.在直角坐标系中计算

定义 6.1 若任意一条垂直 x 轴的直线 $x=x_0$ 至多与区域 D 的边界交于两点（垂直 x 的边界除处），则称 D 为 x 一型区域，且 x 一型区域 D 一定可表示为平面点集: $D=\{(x,y):\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}$.即曲线 $y=\varphi_1(x)$（下曲线），$y=\varphi_2(x)$（上曲线）及直线 $x=a,x=b$ 所围成的区域，如图所求（特殊情况下，直线段 $x=a,x=b$ 可能为一点即 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 $x=a$ 处或 $x=b$ 处相交），此时 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$





定义 6.2 若任意一条垂直 y 轴的直线 $y=y_0$ 至多与区域的边界交于两点（垂直于 y 轴的边界除处），则称 D 为 y 一型区域，且 y 型区域一定可表示为平面点集：$D=\{(x,y):\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}$.即由线 $x=\psi_1(y)$（左曲线），$x=\psi_2(y)$（右曲线）及直线 $y=c,y=d$ 所围成，如图所求（特殊情况下，直线 $y=c,y=d$ 可能为一点），此时 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx.$

许多常见的区域都可分割成有限个无公共内点的 x 一型区域或 y 型区域，利用二重积分的可加性知，即 $D=D_1+D_2+D_3$，且 D_1,D_2,D_3 或者为 x 一型区域或者为 y 型区域，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy.$$

2.在极坐标系下的计算

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.则 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$

当积分区域是圆域或圆域一部分时，可用极坐标变换，若被积函数中含有 $x^2 + y^2$，更要用极坐标变换。

定义 6.3 若任意射线 $\theta = \theta_0$ 与区域 D 的边界至多交于两点（边界是射线段除外），则称 D 为 θ 一型区域，且 θ 一型区域 D 可表示为平面点集 $\{(r,\theta): r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$，即由曲线 $r = r_1(\theta)$（下曲线），$r = r_2(\theta)$（上曲线），及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$，围成的区域如图 6-3 所示。（特殊情况下，$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 可能为一点）。此时

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

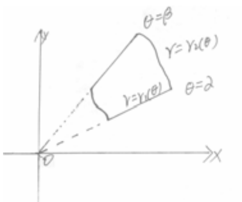


图 6-3

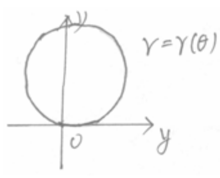


图 6-4

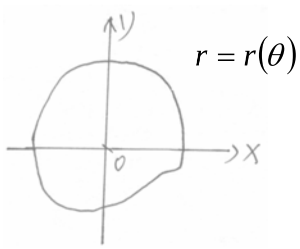


图 6-5

（1）若极点 O 在区域外部，此时区域 D 可表示为 $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$，如图 6-3 所示，则有 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

（2）若极点 O 在区域 D 边界上，且边界曲线 $r = r(\theta)$ 向外凸，（此时区域 D 可表求为 $D: 0 \le r \le r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$，其中 $[\alpha, \beta]$ 为边界曲线 $r = r(\theta)$ 的定义域，如图 6-4 所示，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

（3）若极点 O 在区域 D 的内部，此时区域 D 可表示为 $D: 0 \le r \le r(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$.如图 6-5 所示，则有 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

注：在区域θ的变化区间$[\alpha,\beta]$内，过极点作射线，此射线穿过区域 D，穿入点所在的曲线$r=r_1(\theta)$为下限（下曲线），穿出点所在的曲线$r=r_2(\theta)$为上限（上曲线）。

有时也可以把 D 表示 r 一型区域：$\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r),r_1\le r\le r_2$，即由曲线$\theta=\theta_1(r),\theta=\theta_2(r)$与圆$r=r_1,r=r_2$所围成的区域。在 r 的变化区间$[r_1,r_2]$，以 O 为心，以 r 为半径作圆，曲线按逆时针方向穿过区域 D（图 6-6），穿入点的极角$\theta=\theta_1(r)$为下限（称为小角曲线），穿出点的极角$\theta=\theta_2(r)$为上限（称为大角曲线），有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta.$$

特别地，若区域 D 为：$\alpha\le\theta\le\beta,r_1\le r\le r_2$，其中$\alpha,\beta,r_1,r_2$均为常数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1}^{r_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta.$$

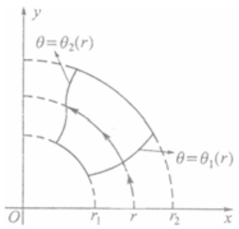


图 6-6

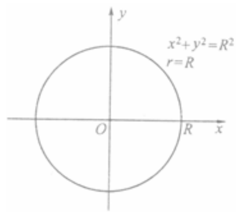
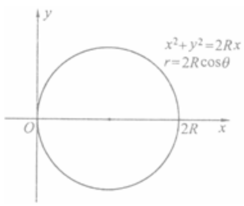


图 6-7

(1)若 D 是由曲线$x^2+y^2=R^2$所围成的区域(图6-7)。经极坐标变换,方程为:$r=R$，属于 1（3）的情形，有$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

（2）若 D 是曲线$x^2+y^2=2xR$所围成的区域（图 6-8）。经极坐标变换，方程为：$r=2R\cos\theta$，属于 1（2）情形，由$D:0\le r\le 2R\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，知

$$\iint_\sigma f(x,y)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$



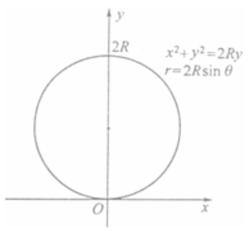


图 6-8　　　　　　　　　　　　　　　　　图 6-9

(3) 若 D 是曲线 $x^2+y^2=2Ry$ 所围成的区域（图 6-9)。经极坐标变换，曲线方程为：

$r=2R\sin\theta$，属于 1（2）情形，由 $D:0\le r\le 2R\sin\theta, 0\le\theta\le\pi$，知

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

3.对称区域上二重积分的性质

设 D 为平面区域，若

（i）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & \text{当} f(x,-y)=-f(x,y), \text{即} f \text{关于} y \text{是奇函数}, \\ \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当} f(x,-y)=f(x,y), \text{即} f \text{关于} y \text{是偶函数}.\end{cases}$$

（ii）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & \text{当} f(x,-y)=-f(x,y), \text{即} f \text{关于} x \text{是奇函数}, \\ \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当} f(x,-y)=f(x,y), \text{即} f \text{关于} x \text{是偶函数}.\end{cases}$$

（iii）若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 0 点对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & \text{当} f\ -(x,-y)=-f(x,y), \\ \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & \text{当} f(-x,-y)=f(x,y),.\end{cases}$$

第十一章　级数

大纲要求

了解 任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念，以及绝对收敛与条件收敛的关系，函数项级数的收敛域及和函数的概念，幂级数在其收敛区间内的一些基本性质（和函数的连续性、逐项微分和逐项积分），函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

会 用根值判别法，求一些幂级数在收敛区间内的和函数，由此求出某些数项级数的和.

理解 常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，幂级数的收敛半径的概念、收敛区间及收敛域的概念.

掌握 级数的基本性质及收敛的必要条件，几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件，正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，交错级数的莱布尼茨判别法，幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法，e^x、$\sin x$、$\cos x$、$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.

内容精要

（一）　基本概念

定义 7.1　设 $\{u_n\}$ 是一个给定的数列，按照数列下标的顺序把数列的项依次相加得到的形式上的和　$u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$，称为数项级数或简称为级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

设 $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$，称为级数得地 n 个部分河，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$=A（常数）时，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ =A；若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

定义 7.2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一般级数，若收敛，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛。对一般级数需要判断是绝对收敛，是条件收敛，还是发散。

（二）重要定理与公式

1.收敛级数的性质

性质 1 （线性运算法则）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=B$，则对任何常数 α,β， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 均收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

性质 2　一个级数改变它的有限项式或去掉前面有限项或在级数前面添加有项得到的级数收敛性不变。

注：有了这个性质，我们下面关于级数收敛性定理中的条件，若要求从第一项具有某种性质，可减弱为从某一项以后具有该性质，结论仍成立。

性质 3　（收敛级数的结合性）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则在级数中任意添加括号所得到的新级数也收敛，其和不变，反之不成立。

注 1：前提是级数收敛，否则结论不成立。例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散，加括号后得到的级数（1-1）+（1-1）+…+（1-1）+…是收敛的。这个例子也是性质 3 逆命题的反例。

注 2：正项级数（即$u_n\geq 0$）的收敛性与添加括号以后的级数具有相同的收敛性，若收敛其和相等。

性质 4　（收敛的必要条件），若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，反之不成立。

例如　$\mathop{lin}\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ 但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

推论（逆否定理）若$\lim_{n\to\infty}u_n$（存在）$\neq 0$或$\lim_{n\to\infty}u_n$不存在，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

例如　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1},\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}$

由于$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\neq 0,\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}=\infty$，所以上面三个级数均发散.

2.两个重要的级数

（1）P 一级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（P 为常数），当 P>1 时，该级数收敛（但和不能用一个具体的式子表示出来），当$P\leq 1$时，该级数发散。

（2）几何级数（等比级数）$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$（q 为常数），当$|q|<1$时，该级数收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$，当$|q|\geq 1$时，该级数发散。

3.判断正项级数收敛性的定理

定理 7.1 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是 :正项级数的部分和 Sn 有上界,即$\exists M>0$，对一切自然数 n，都有$S_n \le M$.

定理 7.2 （比较判别法)设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数,且存在一个自然数 N_0,当$n \ge N_0$时，$u_n \le v_n$，有

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即两个正项级数大的收敛，小的也收敛，反之不成立。

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，即两个正项级数小的发散，大的也发散，反之不成立。

比较判别法是判断正项级数收敛性的一个重要方法，给定一个正项级数，若用比较判别法判断其收敛性，则先通过观察，若它可能收敛，然后需要找到一个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,使$u_n \le v_n (n \ge N_0)$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，如果通过观察，它可能发散，则需要找到一个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,使$u_n \ge v_n (n \ge N_0)$且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

只有知道一些重要级数的收敛性，并加以灵活运用，才能熟练掌握比较判别法。

推论 7.2.1（比较判别法的极限形式）设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，并且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，

（1）当$0<l<+\infty$即$u_n \sim lv_n$(即lv_n是u_n的等价量)时，两个级数具有相同的收敛性；

（2）当$l=0$时,若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，反之不成立。

（3）当$l=+\infty$时,若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，反之不成立。

特别地　如果存在 P>1，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^p}}=l$,且$0 \le l < +\infty$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

如果存在 $P \le 1$,使$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n^p}} = l$,且$0 < l \le +\infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

在利用比较判别法的极限形式时，看能否找到 u_n 的等价量 lv_n,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。此时可把函数极限中的一些重要等价无穷小量的公式用上。

如果$u_n = \dfrac{a}{n^p} + 0(\dfrac{1}{n^p})(a \ne 0)$,则$u_n \sim \dfrac{a}{n^p}(n \to \infty)$，故当 P>1 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $p \le 1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。这一结论使我们有可能利用泰勒公式来判断级数的收敛性。

定理 7.33　（比值判别法或达朗贝尔（D’Alembert）判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$(或$+\infty$)，当 r<1 时，级数收敛；当 r>1（或$r = +\infty$时）时，级数发散；当 r=1 时，该方法失效，需用其它方法判断。

比值判别法适合 u_{n+1} 与 u_n 有公因式，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$(存在)$\ne 1$或等于$+\infty$ 情形。

定理 7.4 （根值判别法或柯西（Cauchy）判别法）

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = r$(或$+\infty$)，当 r<1 时，级数收敛；当 r>1(或$r = +\infty$)时，级数发散，当 r=1 时，该方法失效，需用其它方法判断。

根值判别法适合 u_n 中含有 n 次方的表达式，是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$(存在)$\ne 1$或等于$+\infty$ 情形。

定理 7.5　（积分判别法）设 $f(x)$在$[b,+\infty]$上连续单调（b>1 为常数），记

$u_n = f(n)$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\int_1^{+\infty} f(x)dx$具有相同的收敛性。

4.判断一般级数收敛性的定理

定理 7.6 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

定理 7.7 （绝对值的比值判别法）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一般级数，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=r\neq 1(\text{或}r=+\infty)$，当 r<1 时，级数绝对收敛，r>1（或 $r=+\infty$）时，级数发散。

定理 7.8 （绝对值的根值判别法）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一般级数，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=r\neq 1(\text{或}r=+\infty)$，当 r<1 时，级数绝对收敛，当 r>1 (或 $r=+\infty$) 时级数发散。

定理 7.9 （莱布尼兹判别法）设 $u_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数且满足：(1) $\{u_n\}$ 递减

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛且和 $S\leq u_1$，误差 $R_n=|S-S_n|\leq u_{n+1}$.

5.绝对收敛级数的性质

性质 1　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则重排以后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 也收敛，其和不变，反之不成立。

性质 2　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=B$，则 u_iv_j 按任意顺序排列得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 绝对收敛，且其和为 AB.

6.幂级数

1.设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为函数项级数，其中 $u_n(x)$ 在 E 上有定义 (n=1,2,⋯). 若 $x_0\in E,\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则 x_0 称为函数项级数的收敛点，否则称为发散点. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 全体收敛点组成的集合 D 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域。由函数定义知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是 D 上 x 的函数，记作 S(x)，称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$，$x\in D$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ （其中 a_n 为常数，n=1,2,⋯）称为 ($x-x_0$) 的幂级数或称为泰勒级数，特别地 $x_0=0,\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数或称为麦克劳林级数。

定理 7.10　（柯西—阿达玛公式）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，若

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=R$.

（1）当$0<R<+\infty$时，则幂级数在(x_0-R,x_0+R)内绝对收敛，当$|x-x_0|>R$时发散，$x-x_0=\pm R$时，需用其它方法判断其收敛性。

（2）当 R=0 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$仅在 x_0 处收敛，$x\neq x_0$时发散。

（3）当$R=+\infty$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在$(-\infty,+\infty)$上绝对收敛。

因此，我们称 R 为收敛半径，(x_0-R,x_0+R）为收敛区间，当 R>0 时，设幂级数的收敛域为 D，根据定理的结论知$(x_0-R,x_0+R)\subset D\subset[x_0-R,x_0+R]$,所以收敛域是收敛区间$(x_0-R,x_0+R)$与收敛端点组成的集合.

上面定理中的两个公式，根据具体的 a_n进行选用。

注：上面定理求 R 的公式仅适合$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的形式，对于本质上不是这种形式，不能用上面的公式，只能有其他方法求，在后面的例题中我们会说明.

2．幂级数的性质

性质 1　设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为 R（R>0），则

（1）幂级数在(x_0-R,x_0+R)内的和函数 S(x)是连续函数；

（2）幂级数在(x_0-R,x_0+R)内逐项可导或逐项可积，且可导后或可积后待到的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径。

性质 2　（唯一性定理），设 S(x)为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在$x_0$某邻域内的和函数，则

$$a_n=\frac{s^{(n)}(x_0)}{n!},n=0,1,2,\cdots.$$

性质 3　若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$的某邻域相等，则$a_n=b_n,n=0,1,2,\cdots.$

性质 4　（运算法则）若　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$的收敛半径分别是 R_a和 R_b，

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)(x-x_0)^n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,|x-x_0|<R.$$

$$[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n]\cdot[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,|x-x_0|<R.$$

其中α,β均为常数，$R=\min\{R_a,R_b\},c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

设$\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n}=\sum_{n=0}c_n(x-x_0)^n,c_n$为待求系数，由于

$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n].[\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n]$，得$b_n=\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k},n=0,1,2,3,\cdots$.由

$b_0=a_0c_0$，解得$a_0\neq 0,c_0=\dfrac{b_0}{a_0}$,由$b_1=a_0c_1+a_1c_0$,解得$c_1=\dfrac{b_1-a_1\frac{b_0}{a_0}}{a_0}$,如此下去可求

出$c_n(n=0,1,2,\cdots)$但必须注意，若$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$的收敛半径为 R，则$R<\min\{R_a,R_b\}$.

7.函数展成幂级数

定理 7.11　设 f(x)在 x_0存在任意阶导数，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$的收敛区间

为$|x-x_0|<R(R>0)$，则在$|x-x_0|<R$内

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Leftrightarrow x\in(x_0-R,x_0+R)\text{时},\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0.$$

由上面定理知，用定义把$f(x)$展成泰勒级数的步骤如下：

(1) 计算$f^{(n)}(x_0),n=0,1,2,\cdots$;

(2) 写出对应的泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(0)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，并求出该级数的收敛区间

$|x-x_0|<R$;

(3) 验证$|x-x_0|<R$时,$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$;

（4） $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0), |x-x_0|<R.$

有时用定义展开比较麻烦，或者 $f'^{(n)}(x_0)$ 不容易求，或者证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 比较困难，但由性质 2（唯一性定理）知，如果可以将一个函数在一点处展开，则不管用什么方法，所得到的幂级数展开式完全一样.

七个常用的麦克劳林展开式：

1） $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（2） $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（3） $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（4） $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots, x\in(-1,1];$

（5） $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots, x\in(-1,1);$

（6） $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots, x\in(-1,1);$

（7） $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1),$

8.欧拉公式

由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，把它推广到纯虚数情形，定义 e^{ix} 的意义如下（其中 x 为实数）：

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots$$

$$=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)$$

$=\cos x+i\sin x$，x 用-x 代换，有 $e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$

从而 $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),\quad \cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$.以上这四个公式统称为欧拉公式.

类型 1.1 判断正项级数的收敛性

解题策略 1. 若函数是一个抽象的方法：1.定义. 2.正项级数收敛的充要条件前 n 项和有上界. 3.比较判别法 . 4.比较判别法的极限形式.5.比值判别法. 6.根值判别法.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$(存在) $\neq 0$或$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$不存在,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

类型 1.2 判断一般项级数的收敛性

解题策略 1、绝对值的比值判别法　2、绝对值的根值判别法　3、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛　4、交错级数的莱布尼兹判别法　5、定义　6、若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$(存在) $\neq 0$或$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

类型 1.3 求幂级数收敛域、和函数及数项级数的和

解题策略 1.利用七个基本函数的展开式，右边是幂级数，左边为和函数；利用线性运算法则求和函数：即把所给幂级表示成简单幂级数的线性组合，而这些简单幂级和能求出和函数，从而求出所给幂级数的和函数。

2.设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x\in(x_0-R, x_0+R)$,　$S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$ ，

若 $S'(x)$ 能求出，则　$S(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x} S'(x)dx.$

特别地 $x_0=0$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x\in(-R,R)$, $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}, x\in(-R,R).$

若 $S'(x)$ 能求出，则 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx.$

这种方法是先求导，再积分.

3.设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x\in(x_0-R, x_0+R)$,

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n (x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

若 $\int_{x_0}^{x} S(x)dx$ 能求出，则 $S(x)=(\int_{x_0}^{x} S(x)dx)'$.这种方法是为先积分，后求导.

4.变量替换法，通过变量替换，把复杂幂级数，转化为简单幂级数求出和，再变量代换回去。

利用幂级数的求和。

5.我们还可以求数项级数的和：方法是把数项级数中的某个数换成 x,得到一个幂级数，（例如　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1}$ ，把 $\frac{1}{2}$ 换成 x，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ），利用上面的方法求出幂级数的和函数

$S(x)$ 的表达式，并指出该数在幂级数的收敛区间内或收敛域内，然后把该数代入和函数

$S(x)$ 的表达式，从而求出数项级数的和。

类型 1.4 函数展成幂级数

解题策略 1.利用线性运算，将函数表示成简单函数的线性运算，利用七个基本函数展开式或已知函数的展开式将这些简单函数展成 x 的幂级数,从而将所给函数展成 x 的幂级数。

2.将 $f'(x)$ 展成 x 的幂级数，即

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.\ \ f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

3.将 $\int_0^x f(x)dx$ 展成 x 的幂级数，即 $\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$f(x)=(\int_0^x f(x)dx)'=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}.$$

4.变量替换　函数展成 $(x-x_0)$ 幂级数的方法

令 $x-x_0=t$ ，于是 $f(x)=f(x_0+t)$ ，利用 $f(x)$ 展成 x 幂级数的方法，使

$f(x_0+t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ ，从而 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

还可以利用定义（能不用尽量不用）。

注：把函数展成幂级数实际是求幂级数和函数的逆过程，注意到这一点，对我们无论是求幂级数的和函数，还是把函数展成 x 的幂级数都是有利的。

第一章　函数、极限、连续

注　“★”表示方法常用重要.

一、求函数极限的方法

★1.极限的四则运算；★2.等价量替换；★3.变量代换；★4.洛比达法则；★5.重要极限；★6.初等函数的连续性；7.导数的定义；8. 利用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式；9.夹逼定理；10 利用带有拉格朗日余项的泰勒公式；11.拉格朗日定理；★12. 无穷小量乘以有界量仍是无穷小量等.

★二、已知函数极限且函数表达式中含有字母常数，确定字母常数数值的方法

运用无穷小量阶的比较、洛必达法则或带有佩亚诺余项的麦克劳林公式去分析问题，解决问题。

三、无穷小量阶的比较的方法

利用等价无穷小量替换或利用洛必达法则，无穷小量的等价代换或利用带有皮亚诺余项的佩亚诺余项公式展开

四、函数的连续与间断点的讨论的方法

如果 $f(x)$是 初等函数，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处没有定义，但在 x_0 一侧或两侧有定义，则 $x=x_0$ 是间断点，再根据在 $x=x_0$ 处左右极限来确定是第几类间断点。如果 $f(x)$ 是分段函数，分界点是间断点的怀疑点和所给范围表达式没有定义的点是间断点。

五、求数列极限的方法

★1.极限的四则运算；★2. 夹逼定理；★3. 单调有界定理；

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A(\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A(\infty)$ ；5. 数列的重要极限；6.用定积分的定义求数列极限；7. 利用若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ；8. 无穷小量乘以有界量仍是无穷小量；9.等价量替换等.

【评注】1. 数列的项有多项相加或相乘式或 $n\to\infty$ 时，有无穷项相加或相乘，且不能化简，不能利用极限的四则运算，

2.如果数列的项用递推关系式给出的数列的收敛性或证明数列极限存在，并求极限.用

单调有界定理

3. 对数列极限的未定式不能用洛比达法则。因为数列作为函数不连续，更不可导，故对数列极限不能用洛比达法则.

4. 由数列 $\{a_n\}$ 中的通项是 n 的表达式，即 $a_n = f(n)$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 是特殊与一般的关系，由归结原则知

★5. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$

第二章　一元函数微分学

★一、求一点导数或给处在一点可导推导某个结论的方法：

利用导数定义，经常用第三种形式

二、研究导函数的连续性的方法：

1. 求出 $f'(x)$，对于分段函数的分界点要用左右导数定义或导数定义求. 2. 讨论 $f'(x)$ 的连续性，

★三、求初等函数的导数的方法：

在求导之前尽可能的化简，把函数的乘除尽量化成加减，利用对数微分法转化为方程确定隐函数的求导等等，从而简化求导过程. 要熟练记住基本初等函数的导数公式、导数的四则运算，理解并掌握复合函数的求导法则.

四、求分段函数的导数的方法：

求分段函数导数不在分界点可直接利用求导公式。在分界点

（1）若在分界点两侧的表达式不同，求分界点的导数有下述两种方法：

（i）利用左右导数的定义。　　　　（ii）利用两侧导函数的极限。

（2）若在分界点两侧的表达式相同，求分界点的导数有下述两种方法：

（i）利用导数定义。　　　　（ii）利用导函数的极限。

★五、求参数式函数的导数的方法

若 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\varphi'(t), \psi'(t)$ 存在且 $\varphi'(t) \neq 0$，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}$$

★六、求方程确定隐函数的导数的方法：

解题策略 求方程 $f(x,y)=g(x,y)$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数时，由 y 是 x 的函数，此时方程两边是关于 x 表达式的恒等式，两边同时对 x 求导，会出现含有 y'的等式，然后把 y'看成未知数解出即可。

★七、求变上下限函数的导数的方法：

解题策略 利用变上下限函数求导定理，注意化成变上下限函数的成标准形式

八、求函数的高阶导数的方法：

求导之前，对函数进行化简，尽量化成加减，再用高阶导数的运算法则

九、方程根的存在性

把要证明的方程转化为 f(x)=0 的形式。对方程 f(x)=0 用下述方法：

★ 1. 根的存在定理　若函数 f(x)在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

★2. 若函数 f(x)的原函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，则 f(x)在 (a,b) 内至少有一个零值点.

3. 用泰勒公式证明方程根的存在性.

4. 实常系数的一元 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0)$，当 n 为奇数时，至少有一个实根。

证　设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=x^n(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n})$$

由 $a_0\neq 0$，不妨设 $a_0>0$。由于 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，取 $M=1$，$\exists N_0>0$，当 $x>N_0$ 时，都有 $f(x)>1>0$。

取 $b>N_0$，有 $f(b)>0$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，取 $M=1$，$\exists N_1>0$，当 $x<-N_1$ 时，都有 $f(x)<-1<0$。

取 $a<-N_1<b$，$f(a)<0$。由 f(x)在[a,b]连续，f(`a)f(b)<0，由根的存在定理知至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使$f(\xi)=0.$

5. 实系数的一元 n 次方程在复数范围内有 n 个复数根，至多有 n 个不同的实数根。

★ 6. 若 f(x)在区间Ⅰ上连续且严格单调，则 f(x)=0 在Ⅰ内至多有一个根。若函数在两端点的函数（或极限）值同号，则 f(x)=0 无根，若函数在两端点的函数（或极限）值异号，则 f(x)=0 有一个根。

★7. 求具体连续函数 f(x)=0 在其定义域内零值点的个数：首先求出 f(x)的严格单调区间的个数，若有 m 个严格单调区间，则至多有 m 个不同的根。至于具体有几个根，按照 6 研究每个严格单调区间是否有一个根。

8.若函数 f(x)的原函数 F(x)在某点 x_0处取极值，在 x_0处导数也存在，由费马定理知 $F'(x_0)=0$，即 $f(x_0)=0$。(用的较少)

★9.方程中含有字母常数，讨论字母常数取何值时，方程根有几个根地方法：(1) 把要证明的方程转化为$g(x)=k$的形式，求出$g(x)$的单调区间、极值，求出每个严格单调区间两端函数（极限）值，画草图，讨论曲线与$y=k$轴相交的情况，确定方程根的个数.；(2) 把要证明的方程转化为 f(x)=0 的形式。求出 f(x)的单调区间，极值，求出每个严格单调区间两端函数（极限）值，画草图，讨论曲线与 x 轴相交的情况，确定方程根的个数.

【评注】 在证明方程根的存在性的过程中，我们经常要用拉格朗日定理，积分中值定理，有时也用到柯西中值定理来证明满足方程根的存在性所需的条件，然后利用上述的方法来证明方程根的存在性。

十、证明适合某种条件下ξ的等式

★ 1. 常用的方法有罗尔定理、泰勒公式、根的存在定理、柯西定理、拉格朗定理；

2. 如果证明适合某种条件下ξ,ζ的等式，要用两次 上面的定理 3. 证明存在$\xi\in(a,$ $b)$,使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(x)+f(x)g'(x)=0$,有一个根.而

$$f'(x)+f(x)g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int g'(x)dx+\ln c$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(x)}df(x)=-g(x)+\ln C \Leftrightarrow \ln f(x)=-g(x)+\ln C \Leftrightarrow f(x)=Ce^{-g(x)}$$

$\Leftrightarrow f(x)e^{g(x)}=C$, 令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，即 $F'(x)=(C)'\Leftrightarrow f'(x)+f(x)g'(x)=0$

故对 $F(x)$ 在 $\left[x_1,x_2\right]$ 上满足罗尔定理条件，至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $F'(\xi)=0$, 即

$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

十一、证明不等式的方法：

★1．拉格朗日定理适用于已知函数导数的条件，证明涉及函数（值）的不等式

★2．泰勒公式适用于已知函数的高阶导数的条件，证明涉及函数（值）或低阶导函数（值）的不等式.

★3．单调性定理.（i）对于证明数的大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间两端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明.

(ii) 对于证明函数大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间内上任意一点函数值与区间端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明.

4．利用函数最大值，最小值证明不等式.

把待证的不等式转化为区间上任意一点函数值与区间上某点 x_0 处的函数值大小的比较，然后证明 $f(x_0)$ 为最大值或最小值，即可证不等式成立。

★5．利用函数取到唯一的极值证明不等式.

把待证的不等式转化为区间上任意一点函值与区间内某点 x_0 处的函数值大小的比较，然后证明 $f(x_0)$ 为唯一的极值且为极大值或极小值，即 $f(x_0)$ 为最大值或最小值，即可证不等式成立。

6．用柯西定理证明不等式.

7．利用曲线的凹向性证明不等式.

第三章　一元函数积分学

★1.基本积分表（13 个公式，略）

★2.要知道下列重要不定积分的推导过程，记住这些不定积分结果.

1. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$ ；2. $\int \cos axdx=\frac{1}{a}\sin ax+C$ ；

3. $\int \sin axdx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$ ；

4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$ ；5. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ ；

6. $\int \tan xdx=-\ln|\cos x|+C$ ；7. $\int \cot xdx=\ln|\sin x|+C$ ；

8. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx(a\neq 0)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ ； 9. $\int \csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

10. $\int \sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$.（$a>0$）.

证 令 $x=a\tan t$，

原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}da\tan t=\int \frac{a\sec^2 t}{a|\sec t|}dt$

$\underline{\underline{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}}\int \frac{\sec^2 t}{\sec t}dt=\int \sec tdt=\ln|\sec t+\tan t|+c.$

由 $\tan t=\frac{x}{a}$，作出直角三角形，可知 $\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，于是

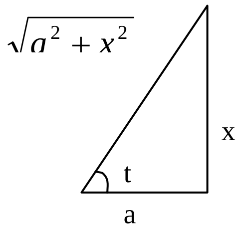


图 3-1

原式 $=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c-\ln|a|$

$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+c_1$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$。

一、求不定积分的方法：

★不定积分的线性运算法则、凑数分法、变量代换法、分部积分法，还有有理式的不定积分、三角函数有理式的不定积分、无理式的不定积分理论上的方法也要知道.

★二、涉及到定积分的方程根的存在性的方法：

利用积分中值理，定积分的 13 条性质，尤其是变上限积分求导定理及微分中值定理，证明方法与技巧与第三章我们介绍的证明思想完全类似。

★三、涉及到定积分的适合某种条件 ξ 的等式的方法：

利用积分中值理，定积分的 13 条性质，尤其是变上限积分求导定理及微分中值定理，证明方法与技巧与第三章我们介绍的证明思想完全类似。

★四、涉及到定积分的不等式的方法：

利用积分中值理，定积分的 13 条性质，尤其是变上限积分求导定理及微分中值定理，证明方法与技巧与第三章我们介绍的证明思想完全类似。

★五、涉及到定积分的等式证明的方法：

用变量代换较多或定积分的条性质、周期函数积分的性质.

★六、定积分计算的方法：

利用牛—莱公式、定积分的线性运算法则、凑微分、变量代换、分部积分计算及定积分的其他公式.

微元法要搞懂

★七、定积分的几何应用

1.求平面图形的面积（略）

2. $y=f(x)$（连续），Ox 轴及直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的曲边梯形绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x 为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$

3. $y=f(x)$（连续）Ox 轴及直线 $x=a$, $x=b(0\le a<b)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所成立体的体积 V_y 为 $V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx.$

4．求由连续曲线 $y=f(x)$, Ox 轴及直线 $x=a,x=b$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所形成

的旋转体的侧面面积 $S_x=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$

5.面曲线的弧长：给定曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$，

其中，$\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的。其弧长 s 可表示为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$

八、定积分在物理中的应用：1.液体的静压力.2 功.3.引力.

第十一章　级数

★一、个重要的级数

1．P 一级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（P 为常数)，当 P>1 时，该级数收敛（但和不能用一个具体的式子表示出来)，当 $P\le 1$ 时，该级数发散。

2．几何级数（等比级数）$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$（q 为常数)，当 $|q|<1$ 时，该级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$，当 $|q|\ge 1$ 时，该级数发散。

七个常用的麦克劳林展开式：

（1） $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（2） $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（3） $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty);$

（4） $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots, x\in(-1,1];$

（5） $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots x\in(-1,1);$

（6） $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots, x\in(-1,1);$

（7） $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, x\in(-1,1),$

二、断正项级数的收敛性方法：

★1 比判别法. ★2 根值判别法. ★3.判别法. ★4.比较判别法的极限形式 5.前 n 项和有上界.6 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$(存在)$\neq 0$或$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。7.定义

三、断一般级数收敛性的方法：

★1、绝对值的比值判别法 ★ 2、绝对值的根值判别法 ★ 3、若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 ★4、交错级数的莱布尼兹判别法 5 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$(存在)$\neq 0$或$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 6 定义

四、级数和函数的方法：

1、利用

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), x \in (-1,1)$$

及个基本函数的展开式，右边是幂级数，左边为和函数。

★利用线性运算法则求和函数：即把所给幂级表示成简单幂级数的线性组合，而这些简单幂级和能求出和函数，从而求出所给幂级数的和函数。

★2、设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x \in (x_0-R, x_0+R),\ \ S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$ ，

若 $S'(x)$ 能求出，则 $S(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x} S'(x)dx.$ 特别地 $x_0=0$ 时，设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-R,R),$$

$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n nx^{n-1}, x \in (-R,R).$ 若 $S'(x)$ 能求出，则 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx.$

这种方法是先求导，再积分

★3、设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x \in (x_0-R, x_0+R),$

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

若 $\int_{x_0}^{x} S(x)dx$ 能求出，则 $S(x)=(\int_{x_0}^{x} S(x)dx)'$.这种方法是为先积分，后求导.

4、变量替换法，通过变量替换，把复杂幂级数，转化为简单幂级数求出和，再变量代换回去。

利用幂级数的求和。

我们还可以求数项级数的和，方法是 函数项级数中的某个数换成 x，得到一个幂级数，（例如 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1}$ ，把 $\frac{1}{2}$ 换成 x，得 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ），利用上面的方法求出幂级数的和函数 $S(x)$ 的表达式，并指出该数在幂级数的收敛区间内或收敛域内，然后把该数代入和函数 $S(x)$ 的表达式，从而求出数项级数的和。

五、数展成幂级数

函数展成 x 幂级数的方法

1、利用定义（能不用尽量不用）。

★2、利用线性运算，将函数表示成简单函数的线性运算，利用七个基本函数展开式或已知函数的展开式将这些简单函数展成 x 的幂级数，从而将所给函数展成 x 的幂级数。

★3、将 $f'(x)$ 展成 x 的幂级数，即

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.\ \ f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

4、将 $\int_0^x f(x)dx$ 展成 x 的幂级数，即 $\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$f(x)=(\int_0^x f(x)dx)'=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}.$$

★5、变量替换　函数展成 $(x-x_0)$ 幂级数的方法

令 $x-x_0=t$，于是 $f(x)=f(x_0+t)$，利用 $f(x)$ 展成 x 幂级数的方法，使

$f(x_0+t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$，从而 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

评注 1.看到有反三角函数的展开题目，首先想到先对函数求导数，把导函数展开，再两边积分。

2.把函数展成幂级数实际是求幂级数和函数的逆过程，注意到这一点，对我们无论是求幂级数的和函数，还是把函数展成 x 的幂级数都是有利的。

第七章 矢量代数与空间解析几何

★类型（一）　　向量的运算

解题策略　1．$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$，2．$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$.3．利用点积、叉积、混合积的性质及几何意义.

★类型（二）　　求直线方程

解题策略　首先考虑直线方程的点向式与一般式，否则再用其它形式.

类型（三）　　直线点向式与参数式转化

类型（四）　　异面直线

★类型（五）　　点到直线的距离、两直线的夹角

★类型（六）　　求平面方程

解题策略　平面方程的点法式、一般式、平面束.

类型（七）　　直线与平面的位置

类型（八）求曲线与曲面方程

解题对策　一般用定义求曲线与曲面方程

疑难问题点拨

一般参数方程$\Gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}$绕 0z 轴旋转所成旋转曲面$\Sigma$的方程

$$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2.$$

证如图 4-7，设$M(x,y,z)$是曲面 上任意一点，而M是由曲线Γ上某点$M_1(x_1,y_1,z_1)$（对应的参数为 t₁）绕 0z 轴旋转所得到。因此有$x_1=f(t_1),y_1=g(t_1$

$z=z_1,\ x^2+y^2={x_1}^2+{y_1}^2,\Rightarrow\ z=h(t_1)\Rightarrow t_1=h^{-1}(z),$

$x_1=f[h^{-1}(z)],y_1=g[h^{-1}(z)]$，

故所求旋转曲面方程为$x^2+y^2=\{f[h^{-1}(z)]\}^2+\{g[h^{-1}(z)]\}^2$.

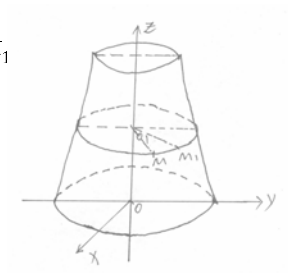


图 4-7

特别地，若Γ绕 0z 轴旋转时，且Γ参数方程表示为$\begin{cases}x=f(z),\\ y=g(z).\end{cases}$则

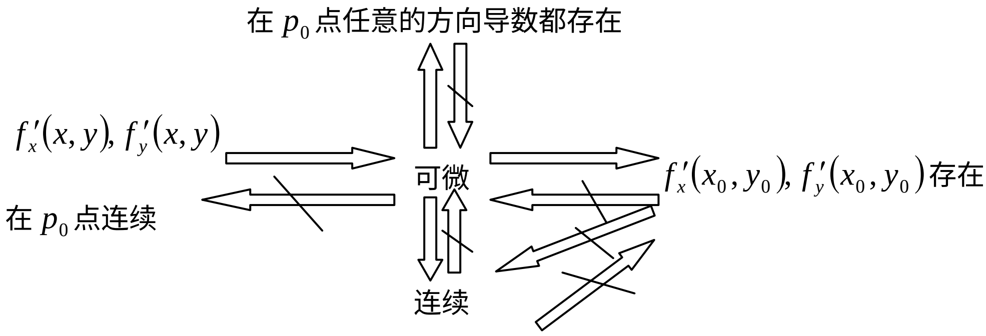
$$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z).$$

事实上，由前面的证明过程可知$x_1=f(z_1),y_1=g(z_1),z=z_1$，$x^2+y^2={x_1}^2+{y_1}^2$

$\Rightarrow x_1=f(z),y_1=g(z),$　　　故$x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z).$

这个结果可作为一个规律记住，一个用参数方程表示的曲线Γ绕某个坐标轴旋转所生成曲面的方程是：若把该曲线表示成该坐标轴对应的变量作为参数的参数方程，则旋转曲面的方程是由参数方程两个等式两边平方再相加得到等式。

第八章　多元函数的微分学



注：这里“$\Longrightarrow$”表示推出，“$\not\Longrightarrow$”表示推不出，能推出的，都是定理，推不出的，我们在下面都举了反例。

类型 1.1 求多元函数的极限

解题策略 1．利用初等多元函数的连续性，即若 $f(P)$是初等函数，P_0 在 $f(P)$的定义域中，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)= f(P_0)$.

注：所谓的初等多元函数就是用一个数学表达式给出的解析式.

2．利用多元函数极限的四则运算。

3．转化为一元函数的极限，利用一元函数的极限来计算.

4．对于证明 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=0$, 或求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$时，感觉极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$可能时零，而直接又不容易证明或计算，这时可用夹逼定理，即 $0\le |f(P)|\le g(P)$, 而 $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=0$.

由夹逼定理知 $\lim\limits_{P\to P_0}|f(P)|=0$, 从而 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=0$,

类型 1.2 判断多元函数的极限不存在

解题策略 1．利用初等 1．选取两条特殊的路径 $P\to P_0$，而函数值的极限存在，但不相等，则 $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)$不存在。2．$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，但不相等

★类型 1.3 讨论多元函数的连续性

解题策略　用多元函数的连续定义

★类型 1.4　求多元函数在一点的偏导数

解题策略　求 $f_x'(x_0,y_0)$有三种方法：(1) 按定义；(2) 求导函数 $\dfrac{d}{dx} f(x,y_0)$，然后把 $x=x_0$ 代入；(3) 求偏导函数 $f_x'(x,y)$，然后把 $x=x_0, y=y_0$ 代入。

求 $f_y'(x_0,y_0)$同样也有三种方法：(1) 按定义；(2) 求导函数 $\dfrac{d}{dy} f(x,y_0)$, 然后把 $y=y_0$；

（3）求偏导函数 $f_y'(x,y)$，然后把 $x=x_0,y=y_0$ 代入。

类型 1.5 判断多元函数在一点的可微性。

解题策略 1.偏导函数连续必可微.2.用可微定义

★类型 1.6 求具体多元函数的偏导数

解题策略 本质上就是求一元函数的导数

★类型 1.7 求多元复合函数的偏导数

解题策略 用多元复合函数求偏导公式。关键是搞清复合结构

★类型 1.8 求多元隐函数的偏导数

解题策略 1.用多元隐函数求偏导公式.2. 用多元隐函数求偏导的方法.3. 用全微分一阶不变性.

类型 1.9 求多元隐函数组的偏导数

解题策略 1. 用多元隐函数求偏导的方法.2.用全微分一阶不变性.

★类型 1.10 求多元函数的方向导数与梯度

解题策略. 用方向导数的公式.2. 用方向导数的定义.3 用梯度定义

★类型 1.11 求多元函数的极值

解题策略. 求出驻点、偏导数不存在的点。对于出驻点，用取到极值的充分条件去判断；对于偏导数不存在的点永定义去判断。

类型 1.12 求多元函数的最值

解题策略. 建立二元函数，指出定义域，用最大值最小值定理.

★类型 1.13 求多元函数的条件极值

解题策略 用拉格朗日乘数法.

★类型 1.14 曲面的切平面与曲线的切线（仅适合数学一）

解题策略 用曲面的切平面与曲线的切线的公式

第九章　　多元函数积分学（二重积分）

★类型 1.1 二重积分在直角坐标下的计算

解题策略 画出积分区域，选择 x-区域、y-区域

★类型 1.2 求二重积分的累次积分

解题策略 根据累次积分的不等式画出积分区域,化成另一顺序的累次积分

★类型 1.3 二重积分在极坐标下的计算

解题策略被积函数中有 x^2+y^2 或积分区域是圆域或圆域的一部分，用极坐标变换。

类型 1.4 对称区域上的二重积分

解题策略 利用积分变量的地位对称性与被积函数关于积分变量的奇偶性

简化计算.

类型 1.5 计算二重广义积分

解题策略 画出积分区域，选择 x-区域、y-区域或用极坐标变换