

## 精确表达浮点数

在计算机中，使用 float 或者 double 来存储小数是不能得到精确值的。如果你希望得到精确计算结果，最好是用分数形式来表示小数。有限小数或者无限循环小数都可以转化为分数。比如：

$$0.9 = 9/10$$

$$0.333 ( 3 ) = 1/3 \text{ ( 括号中的数字表示是循环节 )}$$

当然一个小数可以用好几种分数形式来表示。如：

$$0.333 ( 3 ) = 1/3 = 3/9$$

给定一个有限小数或者无限循环小数，你能否以分母最小的分数形式来返回这个小数呢？如果输入为循环小数，循环节用括号标记出来。下面是一些可能的输入数据，如 0.3、0.30、0.3 ( 000 )、0.3333 ( 3333 )、……

## 分析与解法

拿到这样一个问题，我们往往会从最简单的情况入手，因为所有的小数都可以分解成一个整数和一个纯小数之和，不妨只考虑大于 0，小于 1 的纯小数，且暂时不考虑分子和分母的约分，先设法将其表示为分数形式，然后再进行约分。题目中输入的小数，要么为有限小数  $X=0.a_1a_2\cdots a_n$ ，要么为无限循环小数  $X=0.a_1a_2\cdots a_n(b_1b_2\cdots b_m)$ ， $X$  表示式中的字母  $a_1a_2\cdots a_n$ ， $b_1b_2\cdots b_m$  都是 0~9 的数字，括号部分  $(b_1b_2\cdots b_m)$  表示循环节，我们需要处理的就是以上两种情况。

对于有限小数  $X=0.a_1a_2\cdots a_n$  来说，这个问题比较简单， $X$  就等于  $(a_1a_2\cdots a_n)/10^n$ 。

对于无限循环小数  $X=0.a_1a_2\cdots a_n(b_1b_2\cdots b_m)$  来说，其复杂部分在于小数点后同时有非循环部分和循环部分，我们可以做如下的转换：

$$\begin{aligned} X &= 0.a_1a_2\cdots a_n(b_1b_2\cdots b_m) \\ \Rightarrow 10^n * X &= a_1a_2\cdots a_n.(b_1b_2\cdots b_m) \\ \Rightarrow 10^n * X &= a_1a_2\cdots a_n + 0.(b_1b_2\cdots b_m) \\ \Rightarrow X &= (a_1a_2\cdots a_n + 0.(b_1b_2\cdots b_m)) / 10^n \end{aligned}$$

对于整数部分  $a_1a_2\cdots a_n$ ，不需要做额外处理，只需要把小数部分转化为分数形式再加上这个整数即可。对于后面的无限循环部分，可以采用如下方式进行处理：

$$\begin{aligned} \text{令 } Y &= 0.b_1b_2\cdots b_m, \text{ 那么} \\ 10^m * Y &= b_1b_2\cdots b_m.(b_1b_2\cdots b_m) \\ \Rightarrow 10^m * Y &= b_1b_2\cdots b_m + 0.(b_1b_2\cdots b_m) \\ \Rightarrow 10^m * Y - Y &= b_1b_2\cdots b_m \\ \Rightarrow Y &= b_1b_2\cdots b_m / (10^m - 1) \end{aligned}$$

将  $Y$  代入前面的  $X$  的等式可得：

$$\begin{aligned} X &= (a_1a_2\cdots a_n + Y) / 10^n \\ &= (a_1a_2\cdots a_n + b_1b_2\cdots b_m / (10^m - 1)) / 10^n \\ &= ((a_1a_2\cdots a_n) * (10^m - 1) + (b_1b_2\cdots b_m)) / ((10^m - 1) * 10^n) \end{aligned}$$

至此，便可以得到任意一个有限小数或无限循环小数的分数表示，但是此时分母未必是最简的，接下来的任务就是让分母最小，即对分子和分母进行约分，

这个相对比较简单。对于任意一个分数  $A/B$ ，可以简化为  $(A/\text{Gcd}(A, B)) / (B/\text{Gcd}(A, B))$ ，其中  $\text{Gcd}$  函数为求  $A$  和  $B$  的最大公约数，这就涉及本书中的算法（2.7 节“最大公约数问题”），其中有很巧妙的解法，请读者阅读具体的章节，这里就不再赘述。

综上所述，先求得小数的分数表示方式，再对其分子分母进行约分，便能够得到分母最小的分数表现形式。

例如，对于小数  $0.3(33)$ ，根据上述方法，可以转化为分数：

$$\begin{aligned} &0.3(33) \\ &= (3 * (10^2 - 1) + 33) / ((10^2 - 1) * 10) \\ &= (3 * 99 + 33) / 990 \\ &= 1 / 3 \end{aligned}$$

对于小数  $0.285714(285714)$ ，我们也可以算出：

$$\begin{aligned} &0.285714(285714) \\ &= (285714 * (10^6 - 1) + 285714) / ((10^6 - 1) * 10^6) \\ &= (285714 * 999999 + 285714) / 999999000000 \\ &= 285714 / 999999 \\ &= 2/7 \end{aligned}$$