

精确表达浮点数

在计算机中，使用 float 或者 double 来存储小数是不能得到精确值的。如果你希望得到精确计算结果，最好是用分数形式来表示小数。有限小数或者无限循环小数都可以转化为分数。比如：

$$0.9 = 9/10$$

$$0.333 (3) = 1/3 \text{ (括号中的数字表示是循环节)}$$

当然一个小数可以用好几种分数形式来表示。如：

$$0.333 (3) = 1/3 = 3/9$$

给定一个有限小数或者无限循环小数，你能否以分母最小的分数形式来返回这个小数呢？如果输入为循环小数，循环节用括号标记出来。下面是一些可能的输入数据，如 0.3、0.30、0.3 (000)、0.3333 (3333)、……

分析与解法

拿到这样一个问题，我们往往会展开最简单的情况入手，因为所有的小数都可以分解成一个整数和一个纯小数之和，不妨只考虑大于0，小于1的纯小数，且暂时不考虑分子和分母的约分，先设法将其表示为分数形式，然后再进行约分。题目中输入的小数，要么为有限小数 $X=0.a_1a_2\cdots a_n$ ，要么为无限循环小数 $X=0.a_1a_2\cdots a_n (b_1b_2\cdots b_m)$ ， X 表示式中的字母 $a_1a_2\cdots a_n$ ， $b_1b_2\cdots b_m$ 都是 0~9 的数字，括号部分 $(b_1b_2\cdots b_m)$ 表示循环节，我们需要处理的就是以上两种情况。

对于有限小数 $X=0.a_1a_2\cdots a_n$ 来说，这个问题比较简单， X 就等于 $(a_1a_2\cdots a_n)/10^n$ 。

对于无限循环小数 $X=0.a_1a_2\cdots a_n (b_1b_2\cdots b_m)$ 来说，其复杂部分在于小数点后同时有非循环部分和循环部分，我们可以做如下的转换：

$$\begin{aligned} X &= 0.a_1a_2\cdots a_n (b_1b_2\cdots b_m) \\ &\Rightarrow 10^n * X = a_1a_2\cdots a_n. (b_1b_2\cdots b_m) \\ &\Rightarrow 10^n * X = a_1a_2\cdots a_n + 0. (b_1b_2\cdots b_m) \\ &\Rightarrow X = (a_1a_2\cdots a_n + 0. (b_1b_2\cdots b_m)) / 10^n \end{aligned}$$

对于整数部分 $a_1a_2\cdots a_n$ ，不需要做额外处理，只需要把小数部分转化为分数形式再加上这个整数即可。对于后面的无限循环部分，可以采用如下方式进行处理：

令 $Y=0.b_1b_2\cdots b_m$ ，那么

$$\begin{aligned} 10^m * Y &= b_1b_2\cdots b_m. (b_1b_2\cdots b_m) \\ &\Rightarrow 10^m * Y = b_1b_2\cdots b_m + 0. (b_1b_2\cdots b_m) \\ &\Rightarrow 10^m * Y - Y = b_1b_2\cdots b_m \\ &\Rightarrow Y = b_1b_2\cdots b_m / (10^m - 1) \end{aligned}$$

将 Y 代入前面的 X 的等式可得：

$$\begin{aligned} X &= (a_1a_2\cdots a_n + Y) / 10^n \\ &= (a_1a_2\cdots a_n + b_1b_2\cdots b_m / (10^m - 1)) / 10^n \\ &= ((a_1a_2\cdots a_n) * (10^m - 1) + (b_1b_2\cdots b_m)) / ((10^m - 1) * 10^n) \end{aligned}$$

至此，便可以得到任意一个有限小数或无限循环小数的分数表示，但是此时分母未必是最简的，接下来的任务就是让分母最小，即对分子和分母进行约分，

这个相对比较简单。对于任意一个分数 A/B ，可以简化为 $(A/\text{Gcd}(A, B))/(B/\text{Gcd}(A, B))$ ，其中 Gcd 函数为求 A 和 B 的最大公约数，这就涉及本书中的算法（2.7 节“最大公约数问题”），其中有很巧妙的解法，请读者阅读具体的章节，这里就不再赘述。

综上所述，先求得小数的分数表示方式，再对其分子分母进行约分，便能够得到分母最小的分数表现形式。

例如，对于小数 0.3 (33)，根据上述方法，可以转化为分数：

$$\begin{aligned}0.3 (33) &= (3 * (10^2 - 1) + 33) / ((10^2 - 1) * 10) \\&= (3 * 99 + 33) / 990 \\&= 1 / 3\end{aligned}$$

对于小数 0.285714 (285714)，我们也可以算出：

$$\begin{aligned}0.285714 (285714) &= (285714 * (10^6 - 1) + 285714) / ((10^6 - 1) * 10^6) \\&= (285714 * 999999 + 285714) / 999999000000 \\&= 285714 / 999999 \\&= 2/7\end{aligned}$$