金刚坐飞机问题

国外有一个谚语：

问：体重 800 磅的大猩猩在什么地方坐？

答：它爱在哪儿坐就在哪儿坐。

这句谚语一般用来形容一些“强人”并不遵守大家公认的规则，所以要对其行为保持警惕。

现在有一班飞机将要起飞，乘客们正准备按机票号码（$1, 2, 3, \cdots N$）依次排队登机。突然来了一只大猩猩（对，他叫金刚）。他也有飞机票，但是他插队第一个登上了飞机，然后随意地选了一个座位坐下了[1]。根据社会的和谐程度，其他的乘客有两种反应：

1. 乘客们都义愤填膺，“既然金刚同志不遵守规定，为什么我要遵守？”他们也随意地找位置坐下，并且坚决不让座给其他乘客。
2. 乘客们虽然感到愤怒，但还是以“和谐”为重，如果自己的位置没有被占领，就赶紧坐下，如果自己的位置已经被别人（或者金刚同志）占了，就随机地选择另一个位置坐下，并开始闭目养神，不再挪动位置。

那么，在这两种情况下，第 i 个乘客（除去金刚同志之外）坐到自己原机票位置的概率分别是多少？

[1] 金刚的口头禅是——我是金刚，我怕谁？大家在旅途中可能看见过类似的事儿。

分析与解法

这两个问题之间有一处小小的区别，这个区别是如何影响最后的概率的呢？

【问题 1 的解法】

我们可以用 $F(i)$ 来表示第 i 个乘客坐到自己原机票位置的概率。

第 i 个乘客坐到自己位置（概率为 $F(i)$），则前 $i-1$ 个乘客都不坐在第 i 个位置（设概率为 $P(i-1)$），并且在这种情况下第 i 个乘客随即选择位置的时候选择了自己的位置（设概率为 $G(i)$）。

而 $P(i-1)$ 可以分解为前 $i-2$ 个乘客都不坐在第 i 个位置的概率 $P(i-2)$，和在前 $i-2$ 个乘客都不坐在第 i 个位置的条件下第 $i-1$ 个乘客也不坐在第 i 个位置上的概率 $Q(i-1)$。

于是得到如下的公式（合并结果）：

$$F(i)=G(i)*P(i-1)=G(i)*Q(i-1)*P(i-2)=G(i)*Q(i-1)\cdots Q(2)*P(1)$$

容易知道 $Q(i)=(N-i)/(N-i+1)$，$P(1)=(N-1)/N$，$G(i)=1/(N-i+1)$

代入公式得到，$F(i)=1/N$。

【问题 2 的解法】

可以按照金刚坐的位置来分解问题，把原问题从“第 i 个乘客坐在自己位置上的概率是多少”变为“如果金刚坐在第 n 个位置上，那么第 i 个乘客坐在自己位置上的概率是多少”（设这个概率为 $f(n)$）。

现在金刚坐在了 n 号位置上。如果 $n=1$ 或 $n>i$，那么第 i 个乘客坐在自己位置上的概率是 1(因为大家会尽量坐到自己的位子上，2 号乘客将选择坐到 2 号位置上……)。如果 $n=i$，那么第 i 个乘客是没希望坐到自己的位置上了（他还不至于敢和金刚 PK）。如果 $1<n<i$，那么问题似乎并没有太直接的求解方式。我们来继续分解问题。当金刚坐在了第 n($1<n<i$)个位置上的时候，第 $2, 3, \cdots, n-1$ 号的乘客都可以坐到自己的座位上，于是我们可以按照第 n 个乘客坐的位置来继续分解这个问题。如果第 n 个乘客，选了金刚的座位，那么第 i 个乘客一定坐在自己的位置上；而如果第 n 个乘客坐在第 j（$n<j<=N$）个座位上，就相当于金刚坐了第 j 个座位。

把问题分解到这一步，应该可以进行问题解答的合并了。一般来讲，合并这个步骤，有可能很简单，也可能很复杂，这主要取决于问题分解的结果。在这道题目里，合并问题的主要工具是全概率公式，也即 $P(M)=\sum_{i=1}^{M}P(i)*P(M|i)$，这里 i 表示各种不同的情况，$P(i)$ 表示这种情况发生的概率，$P(M|i)$ 表示在这种情况下事件 M 发生的概率。

首先求解 $f(n)$（$1<n<i$），由前面的分析可知：

$$f(n) = \sum_{j} \frac{1}{N-n+1} * f(j), (j = 1, n+1, n+2, \cdots, N)$$

其中 j 表示第 n 个乘客坐的位置。

所以

$$f(n) = 1/(N-n+1) * (1 + f(n+1) + ... + f(N))(1 < n < i) \qquad \text{（式 1）}$$

由此递推式，可得 $f(n) = f(n+1)(1 < n < i-1)$

将 n=2 代入（式 1），再利用 $f(x) = 1(x > i), f(x) = 0(x = i)$，另 1<$n$, n+1<i−1 可得：

$f(n) = \dfrac{N-i+1}{N-i+2}$，所以

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ 或} n > i) \\ \dfrac{N-i+1}{N-i+2} & (1 < n < i) \\ 0 & (n = i) \end{cases}$$

则$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} * f(n) = \frac{(N-i+1)}{(N-i+2)}$就是第 i 个乘客坐在自己位置上的概率。

回顾

有些问题看起来规模太大而无从下手。这时我们可以采用分而治之的方法，这个方法有两个核心步骤：

1. 分解问题，得到局部问题的答案。

2. 合并问题的解答。

扩展问题

在这个问题假设所有乘客是按照机票座位的次序（1，2，3，...）登机的，在现实生活中，乘客登机并没有一定的次序。如果在金刚抢先入座之后，所有乘客以随机次序登机，并且有原来题目所描述的两种行为，那第 i 个乘客坐到自己原机票位置的概率分别是多少？